Fractali în teoria haosului

Țînteanu Andreea-Camelia
Îndrumător:Asist.Univ.Drd.Vîntu Ioan-Vladimir

Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea "Ovidius" din Constanța

7 decembrie 2024

Cuprins

Zarul Haosului: Un Joc cu Fractali

Teoria haosului reprezintă un domeniu captivant al matematicii, iar în cele ce urmează vă voi prezenta un joc ingenios care își are rădăcinile în principiile acestei teorii și conduce, prin iterații succesive, la construcția fascinantă a unor forme fractalice.

Zarul Haosului: Un Joc cu Fractali

Teoria haosului reprezintă un domeniu captivant al matematicii, iar în cele ce urmează vă voi prezenta un joc ingenios care își are rădăcinile în principiile acestei teorii și conduce, prin iterații succesive, la construcția fascinantă a unor forme fractalice.

Jocul începe prin selectarea aleatorie a trei puncte pe un plan, fiecare dintre acestea având asociate câte două dintre numerele de pe fețele unui zar cu șase fețe. De exemplu, dacă punctele A, B și C au asociate perechile de numere (1,3), (2,5) și, respectiv, (4,6), putem proceda astfel:

Teoria haosului reprezintă un domeniu captivant al matematicii, iar în cele ce urmează vă voi prezenta un joc ingenios care își are rădăcinile în principiile acestei teorii și conduce, prin iterații succesive, la construcția fascinantă a unor forme fractalice.

Jocul începe prin selectarea aleatorie a trei puncte pe un plan, fiecare dintre acestea având asociate câte două dintre numerele de pe fețele unui zar cu șase fețe. De exemplu, dacă punctele A, B și C au asociate perechile de numere (1,3), (2,5) și, respectiv, (4,6), putem proceda astfel:

1) Se alege un punct inițial, numit X_0, situat în mod aleator pe același plan.

Zarul Haosului: Un Joc cu Fractali

Teoria haosului reprezintă un domeniu captivant al matematicii, iar în cele ce urmează vă voi prezenta un joc ingenios care își are rădăcinile în principiile acestei teorii și conduce, prin iterații succesive, la construcția fascinantă a unor forme fractalice.

Jocul începe prin selectarea aleatorie a trei puncte pe un plan, fiecare dintre acestea având asociate câte două dintre numerele de pe fețele unui zar cu șase fețe. De exemplu, dacă punctele A, B și C au asociate perechile de numere (1,3), (2,5) și, respectiv, (4,6), putem proceda astfel:

1) Se alege un punct inițial, numit X_0, situat în mod aleator pe același plan.
2) Se aruncă zarul, iar în funcție de rezultatul obținut, se generează un nou punct, X_1. Acest punct va fi situat la un raport $r = \frac{1}{2}$ pe segmentul care unește punctul X_0 și punctul corespunzător rezultatului aruncării zarului. Spre exemplu, dacă zarul indică numărul 4, noul punct X_1 va fi situat la mijlocul segmentului X_0C.

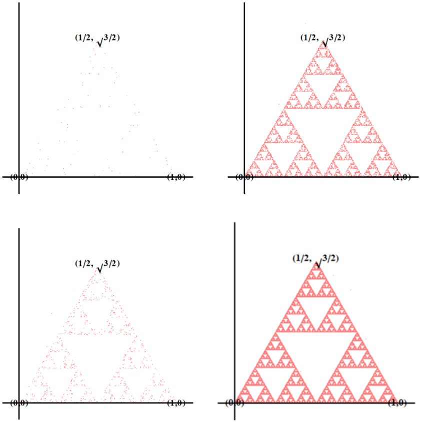
3) Prin repetarea acestui procedeu de un număr suficient de mare de ori, apare, în mod neașteptat, bine-cunoscutul Triunghi al lui Sierpiński.

3) Prin repetarea acestui procedeu de un număr suficient de mare de ori, apare, în mod neașteptat, bine-cunoscutul Triunghi al lui Sierpiński.

În imaginea următoare, se prezintă rezultatul după 100 , 1.000 , 10.000 si 100.000 de iterări ale procesului descris.

3) Prin repetarea acestui procedeu de un număr suficient de mare de ori, apare, în mod neașteptat, bine-cunoscutul Triunghi al lui Sierpiński.

În imaginea următoare, se prezintă rezultatul după 100 , 1.000 , 10.000 si 100.000 de iterări ale procesului descris.



Definiții

Definiția 1   Fie $f : P \longrightarrow P$ funcția jocului care îndeplinește condiția $f(X_s) = X_{s+1} \ \ \forall s \in \mathbb{N}$, unde X_s și X_{s+1} sunt puncte consecutive ale jocului .

Definiții

Definiția 1 Fie $f : P \longrightarrow P$ funcția jocului care îndeplinește condiția $f(X_s) = X_{s+1} \ \ \forall s \in \mathbb{N}$, unde X_s și X_{s+1} sunt puncte consecutive ale jocului .

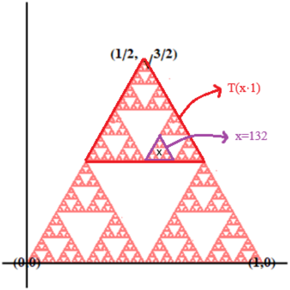
Definiția 2 Fie $x = (n_1, n_2, n_3, ...n_k)$ un șir ternar , unde $n_i \in \{1, 2, 3\}$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ care indică ordinea sectoarelor ("tridrantelor") în care trebuie să te deplasezi, pornind de la triunghiul de bază pentru a ajunge la sub-triunghiul dorit.Fiecare cifră din x corespunde unui vârf sau unei zone din triunghiul curent (etichetate 1, 2, și 3).

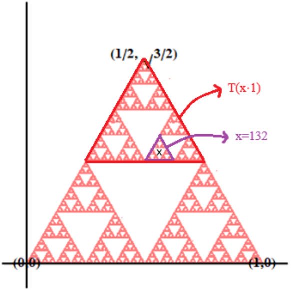
Definiții

Definiția 1 Fie $f : P \longrightarrow P$ funcția jocului care îndeplinește condiția $f(X_s) = X_{s+1} \ \ \forall s \in \mathbb{N}$, unde X_s și X_{s+1} sunt puncte consecutive ale jocului .

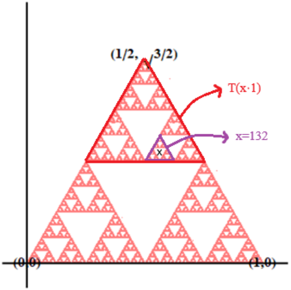
Definiția 2 Fie $x = (n_1, n_2, n_3, ...n_k)$ un șir ternar , unde $n_i \in \{1, 2, 3\}$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ care indică ordinea sectoarelor ("tridrantelor") în care trebuie să te deplasezi, pornind de la triunghiul de bază pentru a ajunge la sub-triunghiul dorit.Fiecare cifră din x corespunde unui vârf sau unei zone din triunghiul curent (etichetate 1, 2, și 3).

Definiția 3 Fie $T(x)$ subtriunghiul simplu (non-Sierpiński) cu prefixul x , unde $T(\emptyset) = T$ reprezintă întregul triunghi . Fie $T(x \cdot 1)$ primul sub-triunghi din triunghiul $T(x)$, asociat tridrantului 1 (legat de vârful 1) , $T(x \cdot 2)$ al doilea sub-triunghi asociat tridrantului 2 (legat de vârful 2) și $T(x \cdot 3)$ al treilea sub-triunghi asociat tridrantului 3 (legat de vârful 3).


(1/2, √3/2)
T(x·1)
x=132
x
(0,0)
(1,0)



Definiția 4 Fie $S(x)$ subtriunghiul Sierpiński cu prefixul x , unde $S(\emptyset) = S$ reprezintă întregul triunghi . Fie $S(x \cdot 1)$ sub-triunghiul Sierpiński corespunzător tridrantului 1 pentru $T(x)$, $S(x \cdot 2)$ este cel din tridrantul 2 și $S(x \cdot 3)$ cel al tridrantului 3.



Definiția 4 Fie $S(x)$ subtriunghiul Sierpiński cu prefixul x , unde $S(\emptyset) = S$ reprezintă întregul triunghi . Fie $S(x \cdot 1)$ sub-triunghiul Sierpiński corespunzător tridrantului 1 pentru $T(x)$, $S(x \cdot 2)$ este cel din tridrantul 2 și $S(x \cdot 3)$ cel al tridrantului 3.

$$S(x) = T(x) \cup S(x \cdot 1) \cup S(x \cdot 2) \cup S(x \cdot 3)$$

$$S(\emptyset) = T(\emptyset) \cup S(1) \cup S(2) \cup S(3)$$

Teorema

Prin aplicarea iterativă a pașilor succesivi ai procesului descris de funcția jocului , se converge către construcția triunghiului Sierpiński.

Teorema

Prin aplicarea iterativă a pașilor succesivi ai procesului descris de funcția jocului , se converge către construcția triunghiului Sierpiński.

Pentru demonstrația acestei teoreme vom folosi trei leme intermediare.

Teorema

Prin aplicarea iterativă a pașilor succesivi ai procesului descris de funcția jocului , se converge către construcția triunghiului Sierpiński.

Pentru demonstrația acestei teoreme vom folosi trei leme intermediare.

Lema 1 Fie $p_x \in S$ un punct de pe triunghiul lui Sierpiński astfel încât $p_x \in T(x)$, unde $x = (n_1, n_2, n_3, ...n_k)$ cel mai scurt prefix cu $n_i \in \{1, 2, 3\}$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ și fie $f(p_x) = q$ (funcția jocului). Atunci $q \in T(x \cdot a) \subset S$ unde a este vârful ales de joc.

Teorema

Prin aplicarea iterativă a pașilor succesivi ai procesului descris de funcția jocului , se converge către construcția triunghiului Sierpiński.

Pentru demonstrația acestei teoreme vom folosi trei leme intermediare.

Lema 1 Fie $p_x \in S$ un punct de pe triunghiul lui Sierpiński astfel încât $p_x \in T(x)$, unde $x = (n_1, n_2, n_3, ...n_k)$ cel mai scurt prefix cu $n_i \in \{1, 2, 3\}$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ și fie $f(p_x) = q$ (funcția jocului). Atunci $q \in T(x \cdot a) \subset S$ unde a este vârful ales de joc.

Demonstrație:

$$\left.\begin{array}{c} f(p_x) = q \overset{\text{def jocului}}{\Longrightarrow} q \in p_x a \\ p_x \in T(x) \text{ și } a \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow q \in T(x \cdot a) \subset S$$

Lema 2 Fie $p_0 \in P \setminus S$ un punct care nu se afla pe triunghiul lui Sierpiński și $q_0 \in S$ astfel încât :

$$\epsilon_0 = || p_0 - q_0 || = \min_{q \in S} || p_0 - q || .$$

După n pași ai jocului parcurs obținem următoarea relație:

Lema 2 Fie $p_0 \in P \setminus S$ un punct care nu se afla pe triunghiul lui Sierpiński și $q_0 \in S$ astfel încât :

$$\epsilon_0 = || \, p_0 - q_0 \, || = \min_{q \in S} || \, p_0 - q \, || \, .$$

După n pași ai jocului parcurs obținem următoarea relație:

$$|| \, p_n - q_n \, || = \frac{\epsilon_0}{2^n}$$

Lema 2 Fie $p_0 \in P \setminus S$ un punct care nu se afla pe triunghiul lui Sierpiński și $q_0 \in S$ astfel încât :

$$\epsilon_0 = || p_0 - q_0 || = \min_{q \in S} || p_0 - q || .$$

După n pași ai jocului parcurs obținem următoarea relație:

$$|| p_n - q_n || = \frac{\epsilon_0}{2^n}$$

Demonstrație:

Fie a_k vârful triunghiului ales în cadrul jocului , unde k=1,2,3 .

Lema 2 Fie $p_0 \in P \setminus S$ un punct care nu se afla pe triunghiul lui Sierpiński și $q_0 \in S$ astfel încât :

$$\epsilon_0 = || \ p_0 - q_0 \ || = \min_{q \in S} || \ p_0 - q \ || \ .$$

După n pași ai jocului parcurs obținem următoarea relație:

$$|| \ p_n - q_n \ || = \frac{\epsilon_0}{2^n}$$

Demonstrație:

Fie a_k vârful triunghiului ales în cadrul jocului , unde k=1,2,3 .

$$f(p_0) = p_1, unde \ p_1 = \frac{p_0 + a_k}{2} \ și \ q_1 = \frac{q_0 + a_k}{2}$$

Lema 2 Fie $p_0 \in P \setminus S$ un punct care nu se afla pe triunghiul lui Sierpiński și $q_0 \in S$ astfel încât :

$$\epsilon_0 = || p_0 - q_0 || = \min_{q \in S} || p_0 - q || .$$

După n pași ai jocului parcurs obținem următoarea relație:

$$|| p_n - q_n || = \frac{\epsilon_0}{2^n}$$

Demonstrație:

Fie a_k vârful triunghiului ales în cadrul jocului , unde k=1,2,3 .

$$f(p_0) = p_1, unde\ p_1 = \frac{p_0 + a_k}{2}\ și\ q_1 = \frac{q_0 + a_k}{2}$$

$$f(p_1) = p_2\ ,\quad unde\ p_2 = \frac{p_1 + a_k}{2}\ și\ q_2 = \frac{q_1 + a_k}{2}$$

$$\vdots$$

$$f(p_{n-1}) = p_n \ , \quad unde \ p_n = \frac{p_{n-1} + a_k}{2} \ și \ q_n = \frac{q_{n-1} + a_k}{2}$$

Atunci :

$$|| \ p_n - q_n \ || = || \ \frac{p_{n-1} + a_k}{2} - \frac{q_{n-1} + a_k}{2} \ ||$$

$$|| \ p_n - q_n \ || = || \ \frac{p_{n-1} - q_{n-1}}{2} \ ||$$

$$|| \ p_n - q_n \ || = || \ \frac{\frac{p_{n-2}+a_k}{2} - \frac{q_{n-2}+a_k}{2}}{2} \ ||$$

$$|| \ p_n - q_n \ || = || \ \frac{p_{n-2} - q_{n-2}}{2^2} \ ||$$

$$\vdots$$

$$|| \ p_n - q_n \ || = || \ \frac{p_0 - q_0}{2^n} \ ||$$

$$f(p_{n-1}) = p_n \ , \quad unde \ p_n = \frac{p_{n-1} + a_k}{2} \ și \ q_n = \frac{q_{n-1} + a_k}{2}$$

Atunci :

$$|| \ p_n - q_n \ ||=|| \ \frac{p_{n-1} + a_k}{2} - \frac{q_{n-1} + a_k}{2} \ ||$$

$$|| \ p_n - q_n \ ||=|| \ \frac{p_{n-1} - q_{n-1}}{2} \ ||$$

$$|| \ p_n - q_n \ ||=|| \ \frac{\frac{p_{n-2}+a_k}{2} - \frac{q_{n-2}+a_k}{2}}{2} \ ||$$

$$|| \ p_n - q_n \ ||=|| \ \frac{p_{n-2} - q_{n-2}}{2^2} \ ||$$

$$\vdots$$

$$|| \ p_n - q_n \ ||=|| \ \frac{p_0 - q_0}{2^n} \ ||$$

$$|| \ p_n - q_n \ ||= \frac{\epsilon_o}{2^n}$$

Lema 3 Fie $q_n \in S$ punctul atins de joc după n iterații , atunci , pentru orice $p \in S$, probabilitatea ca distanța dintre acesta și q_m $(m < n)$ să fie ϵ converge la 1.

Lema 3 Fie $q_n \in S$ punctul atins de joc după n iterații , atunci , pentru orice $p \in S$, probabilitatea ca distanța dintre acesta și q_m $(m < n)$ să fie ϵ converge la 1.

$$\mathbb{P}(\underset{m<n}{min} \parallel q_m - p \parallel < \epsilon) \longrightarrow 1$$

Lema 3 Fie $q_n \in S$ punctul atins de joc după n iterații , atunci , pentru orice $p \in S$, probabilitatea ca distanța dintre acesta și q_m $(m < n)$ să fie ϵ converge la 1.

$$\mathbb{P}(\min_{m<n} \| q_m - p \| < \epsilon) \longrightarrow 1$$

Demonstrație:

Fie $l = [-log_2\epsilon]$. Fie $q_0 \in S(\alpha)$ punctul inițial al jocului și $q_n \in S(\beta_n \cdot \alpha)$ punctul obținut după n iterații unde α și β_n sunt prefixe de lungimi l respectiv n .

Lema 3 Fie $q_n \in S$ punctul atins de joc după n iterații , atunci , pentru orice $p \in S$, probabilitatea ca distanța dintre acesta și q_m $(m < n)$ să fie ϵ converge la 1.

$$\mathbb{P}(\min_{m<n} \| q_m - p \| < \epsilon) \longrightarrow 1$$

Demonstrație:

Fie $l = [-log_2\epsilon]$. Fie $q_0 \in S(\alpha)$ punctul inițial al jocului și $q_n \in S(\beta_n \cdot \alpha)$ punctul obținut după n iterații unde α și β_n sunt prefixe de lungimi l respectiv n .

Fie $x(p, \epsilon)$ cel mai mic prefix (care are lungimea l ,fiind corespunzător punctului inițial) astfel încât:

dacă $q \in S(x(p, \epsilon)) \Rightarrow q \in B_\epsilon[p] = \{q \in P \mid d(q, p) \leq \epsilon\}$.

Lema 3 Fie $q_n \in S$ punctul atins de joc după n iterații , atunci , pentru orice $p \in S$, probabilitatea ca distanța dintre acesta și q_m $(m < n)$ să fie ϵ converge la 1.

$$\mathbb{P}(\min_{m<n} \| q_m - p \| < \epsilon) \longrightarrow 1$$

Demonstrație:

Fie $l = [-log_2\epsilon]$. Fie $q_0 \in S(\alpha)$ punctul inițial al jocului și $q_n \in S(\beta_n \cdot \alpha)$ punctul obținut după n iterații unde α și β_n sunt prefixe de lungimi l respectiv n .

Fie $x(p, \epsilon)$ cel mai mic prefix (care are lungimea l ,fiind corespunzător punctului inițial) astfel încât:

dacă $q \in S(x(p, \epsilon)) \Rightarrow q \in B_\epsilon[p] = \{q \in P \mid d(q, p) \leq \epsilon\}$.

Presupunem că α este ales în mod aleatoriu $\Rightarrow$ șirul $\beta_n\alpha$ este format din triplete independente și aleatorii.

Lema 3 Fie $q_n \in S$ punctul atins de joc după n iterații , atunci , pentru orice $p \in S$, probabilitatea ca distanța dintre acesta și q_m $(m < n)$ să fie ϵ converge la 1.

$$\mathbb{P}(\min_{m<n} \| q_m - p \| < \epsilon) \longrightarrow 1$$

Demonstrație:

Fie $l = [-log_2\epsilon]$. Fie $q_0 \in S(\alpha)$ punctul inițial al jocului și $q_n \in S(\beta_n \cdot \alpha)$ punctul obținut după n iterații unde α și β_n sunt prefixe de lungimi l respectiv n .

Fie $x(p, \epsilon)$ cel mai mic prefix (care are lungimea l ,fiind corespunzător punctului inițial) astfel încât:

dacă $q \in S(x(p, \epsilon)) \Rightarrow q \in B_\epsilon[p] = \{q \in P \mid d(q, p) \leq \epsilon\}$.

Presupunem că α este ales în mod aleatoriu $\Rightarrow$ șirul $\beta_n\alpha$ este format din triplete independente și aleatorii.

Probabilitatea ca un subșir de lungime l să fie $x(p, \epsilon)$ este $\frac{1}{3^l}$, dar pentru că au lungime fixă și încep unul lângă altul $\Rightarrow$ se suprapun $\Rightarrow$ nu sunt independente.

Lema 3 Fie $q_n \in S$ punctul atins de joc după n iterații , atunci , pentru orice $p \in S$, probabilitatea ca distanța dintre acesta și q_m $(m < n)$ să fie ϵ converge la 1.

$$\mathbb{P}(\min_{m<n} || q_m - p || < \epsilon) \longrightarrow 1$$

Demonstrație:

Fie $l = [-log_2\epsilon]$. Fie $q_0 \in S(\alpha)$ punctul inițial al jocului și $q_n \in S(\beta_n \cdot \alpha)$ punctul obținut după n iterații unde α și β_n sunt prefixe de lungimi l respectiv n .

Fie $x(p, \epsilon)$ cel mai mic prefix (care are lungimea l ,fiind corespunzător punctului inițial) astfel încât:

dacă $q \in S(x(p, \epsilon)) \Rightarrow q \in B_\epsilon[p] = \{q \in P \mid d(q, p) \leq \epsilon\}$.

Presupunem că α este ales în mod aleatoriu $\Rightarrow$ șirul $\beta_n\alpha$ este format din triplete independente și aleatorii.

Probabilitatea ca un subșir de lungime l să fie $x(p, \epsilon)$ este $\frac{1}{3^l}$, dar pentru că au lungime fixă și încep unul lângă altul $\Rightarrow$ se suprapun $\Rightarrow$ nu sunt independente.

Vom avea $\left[\frac{n}{l}\right]$ șiruri independente , iar probabilitatea ca cel puțin unul să fie $x(p, \epsilon)$ este $1 - \left(1 - \frac{1}{3^l}\right)^{\left[\frac{n}{l}\right]}$.

Vom avea $\left[\frac{n}{l}\right]$ șiruri independente , iar probabilitatea ca cel puțin unul să fie $x(p,\epsilon)$ este $1-\left(1-\frac{1}{3^l}\right)^{\left[\frac{n}{l}\right]}$.

Înlocuind l $\Rightarrow \mathbb{P}(\underset{m<n}{min} \parallel q_m - p \parallel < \epsilon) \geq 1 - \frac{\epsilon^{log_2 3}}{3}^{\left[\frac{n}{-log_2 \epsilon}\right]} \longrightarrow 1.$

Vom avea $\left[\frac{n}{l}\right]$ șiruri independente , iar probabilitatea ca cel puțin unul să fie $x(p, \epsilon)$ este $1 - \left(1 - \frac{1}{3^l}\right)^{\left[\frac{n}{l}\right]}$.

Înlocuind l $\Rightarrow \mathbb{P}(\min_{m<n} \| q_m - p \| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\epsilon^{log_2 3}}{3}^{\left[\frac{n}{-log_2 \epsilon}\right]} \longrightarrow 1.$

Consecință: Jocul haosului aproape sigur atinge un punct la o distanță de cel mult ϵ de p în $5 \cdot log_2\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \cdot \epsilon^{-log_2 3}$ pași . De exemplu , dacă

$\epsilon = 0.1(\simeq 2^{-3})$ înseamnă aproximativ 600 de pași

$\epsilon = 0.01(\simeq 2^{-7})$ înseamnă aproximativ 45.000 de pași .

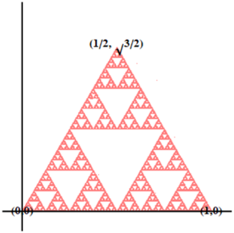
Alte forme, aceleași reguli: fractali în evoluție

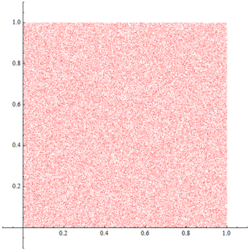
În continuare, sunt prezentate rezultate suplimentare generate prin intermediul jocului , în urma a 100.000 de iterații, având ca punct de plecare un număr variabil de puncte inițiale, ce dau naștere unor forme geometrice de bază diferite (triunghi, pătrat , pentagon , hexagon , octagon), și utilizând diverse raporturi geometrice.

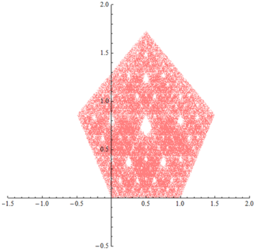
Alte forme, aceleași reguli: fractali în evoluție

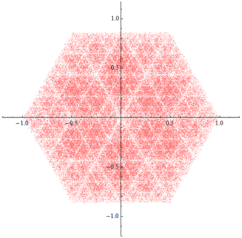
În continuare, sunt prezentate rezultate suplimentare generate prin intermediul jocului , în urma a 100.000 de iterații, având ca punct de plecare un număr variabil de puncte inițiale, ce dau naștere unor forme geometrice de bază diferite (triunghi, pătrat , pentagon , hexagon , octagon), și utilizând diverse raporturi geometrice.

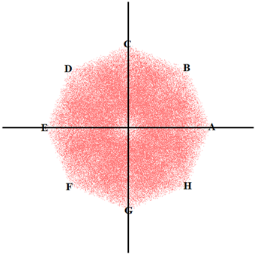
Raport=$\frac{1}{2}$



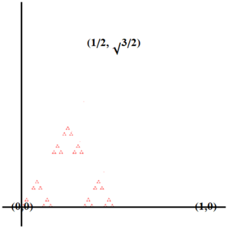


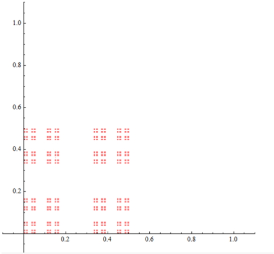


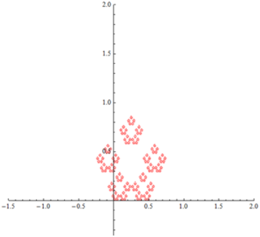


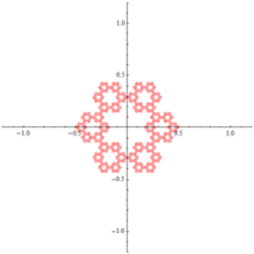


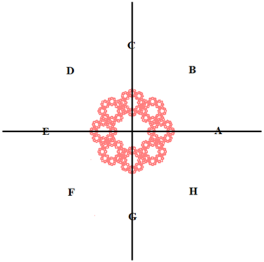
Raport=$\frac{1}{3}$



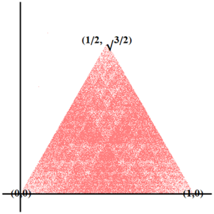


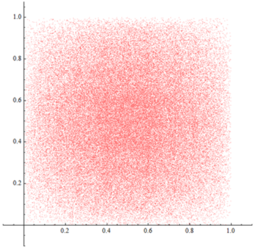


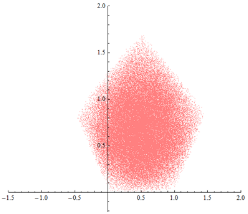


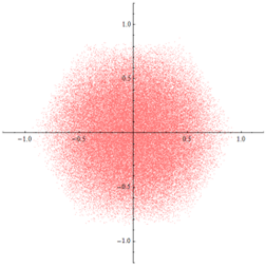


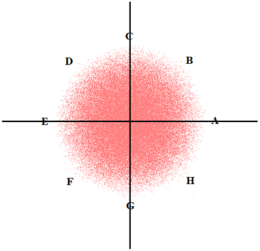
Raport=$\frac{2}{3}$



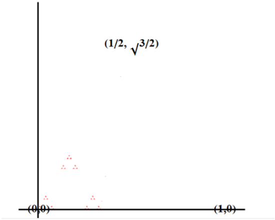


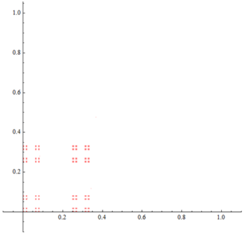


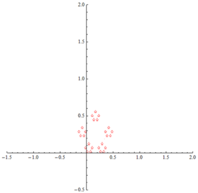


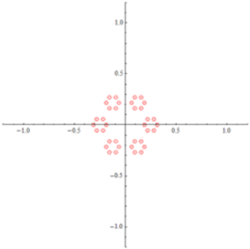


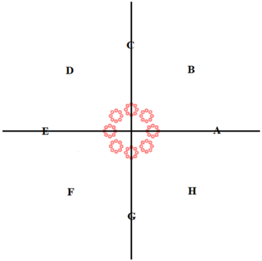
Raport=$\frac{1}{4}$



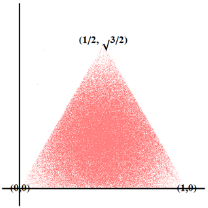


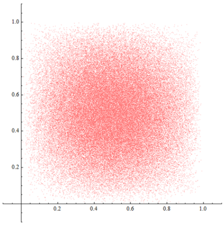


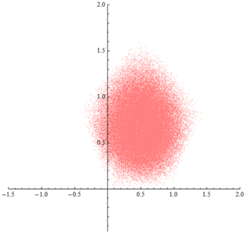


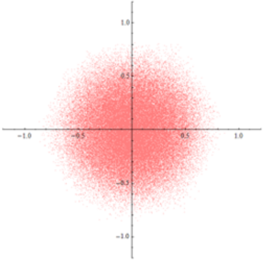


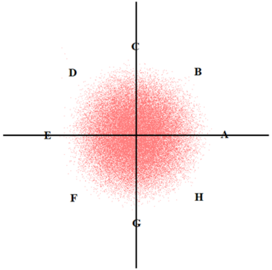
Raport=$\frac{3}{4}$











Concluzie

În concluzie, teoria haosului și fractalii reprezintă domenii remarcabile ale matematicii, care îmbină complexitatea aparent aleatorie cu ordinele subtile ascunse în structuri fascinante. Studierea acestora deschide noi perspective asupra înțelegerii proceselor naturale și abstracte, evidențiind frumusețea și profunzimea lor. Aceste concepte merită explorate și apreciate pentru impactul lor atât în știință, cât și în artă și tehnologie.

Bibliografie

1) https://youtu.be/kbKtFN71Lfs?si=-ixKSLBtRsn6Ba34
2) https://arun.chagantys.org/technical/2020/04/28/chaos-game.html: :text=Here
3) https://fractalfoundation.org/resources/what-is-chaos-theory/
4) https://fractalfoundation.org/resources/what-are-fractals/
5) https://encyclopedia.pub/entry/32860
6) https://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html
7) https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/siertri/siertri.htm
8) Handbook of Mathematical Functions With Formulas - M (1) - Abramowitz, I.A.Stegun