Rădăcini matriceale ale polinoamelor

Andrei-Sorin Ripaș

Academia Navală „Mircea cel Bătrân”

Sesiunea de Comunicări Matematice Decembrie 2024

Cuprins

Pentru orice matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ și orice polinom $p \in \mathbb{R}[x]$, notăm $p(M)$ matricea din $M_n(\mathbb{R})$ pe care o obținem prin evaluarea polinomului $p(x)$ în $x=M$, unde înlocuim $x^0=1$ cu $M^0=I_n$.

Exemplu: Fie $p(x)=x^2-3x+2 \in \mathbb{R}[x]$ și $M \in M_3(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Atunci:

$$p(M)=M^2-3M+2I_3 = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} -3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -6 & -4 & 2 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Putem considera de asemenea cazul în care avem o matrice M cu elemente polinoame, $M \in M_n(\mathbb{R})[x]$.

O astfel de matrice se notează cu $M(x)$ și se numește *matrice polinomială*.

$$\begin{pmatrix} x^2+x+1 & 2x^3+x & x^2-x \\ x^3-x^2 & x^2+1 & x^3-x \\ x-2 & 3x^2-4 & x-1 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + x^1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Observăm și că o astfel de matrice poate fi privită ca un polinom cu coeficienți matrice, $M \in M_n(\mathbb{R})[x]$.

De asemenea, trebuie să luăm în considerare faptul că nu putem discuta despre *M(A)*, din cauza faptului că înmulțirea matricelor nu este comutativă. Dacă înlocuim variabila *x* cu matricea *A*, la fel cum am făcut în cazul polinomului *p(x)*, vom obține de cele mai multe ori o matrice *M(A)* diferită.

Exemplu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Observație: Pentru o matrice polinomială *M(x)* și o matrice *A,* nu are sens să vorbim despre *M(A)*

Definiție: Un număr real m este *rădăcină* a polinomului $p \in \mathbb{R}[x]$ dacă și numai dacă $p(m)=0$.

Ce se întâmplă în cazul polinoamelor în care $M \in M_n(\mathbb{R})$?

Exemplu: Fie $p(x)=x^2-3x+2 \in \mathbb{R}[x]$ și $M \in M_n(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Antunci

$$p(M)=M^2-3M+2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ 3 & 4 & -3 \\ 6 & 6 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 3 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Putem deci să considerăm următoarea definiție:

Definiție: Spunem că matricea $M \in M_n(\mathbb{R})$ este *rădăcina matriceală* a polinomului $p \in \mathbb{R}[x]$ dacă și numai dacă $p(M)=O_n$.

Ce se poate spune despre rădăcinile matriceale ale unui polinom?

Știm că numărul real m este rădăcină a polinomului $p(x)$ dacă și numai dacă

$$p(x) = r(x)(x-m),$$

pentru un polinom $r(x)$ aî. $deg(\, r(x)\,) < deg(\, p(x)\,)$.

Poate exista o relație asemănătoare și în cazul „rădăcinilor matriceale ale unui polinom" ?

Fie $p(x) = x^2\text{-}3x+2 \in \mathbb{R}[x]$. Cum 1 și 2 sunt rădăcinile polinomului $p(x)$, putem scrie:

$$p(x)=(x-1)(x-2)$$

și, evident,

$$p(1)=0 \text{ și } p(2)=0$$

Putem determina rădăcinile matriceale ale unui polinom? O astfel de matrice este $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

din exemplul anterior, dar și matricele

$$M_1=(1) \quad M_2=(2) \quad M_3= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_4= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M_5= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sunt rădăcini matriceale.

O abordare intuitivă este aceea în care „rădăcina matriceală” ar trebui să fie de forma

$M = \begin{pmatrix} x_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_i \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, unde x_i este o rădăcină reală a polinomului $p(x)$.

Într-adevăr, dacă $M = \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ 0 & x_i \end{pmatrix}$, cu $x_i = \{1,2\}$ atunci;

$$p(M) = M^2 - 3M + 2I_2 = \begin{pmatrix} x_i^{\,2} & 0 \\ 0 & x_i^2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ 0 & x_i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_i^{\,2} - 3x_i + 2 & 0 \\ 0 & x_i^{\,2} - 3x_i + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$, deoarece $p(x_i) = 0$

Observăm de asemenea că putem considera $D \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice diagonală,

$D=\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ și d_{ii} sunt rădăcini reale ale unui polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ (nu neapărat distincte) și $P \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă.

Matricea $M=PDP^{-1}$ este o rădăcină matriceală a polinomului p. Acest lucru se poate ușor observa deoarece $M^k = PD^kP^{-1}$ și atunci

$p(M) = Pp(D)P^{-1}$, iar $p(D) = O_n$

În acest moment observăm că:

• rădăcinile matriceale ale unui polinom sunt destul de complexe;

• un polinom (simplu) ar putea avea o infinitate de rădăcini matriceale;

• considerând D și P ca mai sus, avem o metodă pentru a găsi multe rădăcini matriceale;

• această metodă determină o rădăcină matriceală destul de generală întrucât matricea P poate fi orice matrice inversabilă

În explorarea ulterioară a polinoamelor și a rădăcinilor matriceale, putem urma o abordare analog celei a polinoamelor (simple) cu rădăcinile lor:

- Găsirea rădăcinilor unui polinom este mai mult sau mai puțin echivalentă cu descompunerea acestuia în factori polinomiali
- Dacă avem un polinom descompus în factori, în formă liniară, știm totul despre rădăcinile sale (numerice). Prin considerarea anterioară a matricelor diagonalizabile avem un mod sistematic de construcție a rădăcinilor matriceale. Nu știm dacă acestea sunt toate rădăcinile matriceale ale unui polinom dat.

Dar invers? Dacă avem un număr, putem construi întotdeauna un polinom pentru care acel număr este rădăcină?

Am putea face același lucru pentru matrice? Pentru o matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ am putea determina un polinom $p \in \mathbb{R}[x]$, astfel încât $p(M)=O_n$?

Teorema 1: *Fie $m \in \mathbb{R}$ și $p \in \mathbb{R}[x]$. Numărul real m este rădăcină a polinomului $p(x)$ dacă și numai dacă există un polinom $r \in \mathbb{R}[x]$ astfel încât $p(x)=r(x)(x-m)$.*

Demonstrație:

„=>” Presupunem că m este rădăcină a polinomului $p(x)$, deci $p(m)=0$.

Vrem să scriem $p(x)=r(x)(x-m)$ pentru un polinom $r \in \mathbb{R}[x]$.

Fie $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$

Folosind formula:

$$x^i - m^i = (x^{i-1} + x^{i-2}m + \ldots + xm^{i-2} + m^{i-1})(x - m)\,,\ i \geq 2\ ,i \in \mathbb{N}$$

Putem scrie

$p(x)-p(m)=\sum_{i=0}^{n} a_i(x^i-m^i),$ pentru i=0, $(x^0-m^0)=0$

$p(x)-p(m)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x^i-m^i)$, rescriem relația în funcție de formula de mai sus

$$p(x)-p(m)=\sum_{i=2}^{n} a_i(x-m)(x^{i-1}+x^{i-2}m+\ldots+xm^{i-2}+m^{i-1})+a_1(x-m)$$

$$p(x)-p(m)=(x-m)\underbrace{[\sum_{i=2}^{n} a_i(x^{i-1}+x^{i-2}m+\ldots+xm^{i-2}+m^{i-1})+a_1]}_{r(x)}$$

Obținem: $p(x)=(x-m)r(x)+p(m)$

Cum $p(m)=0$, avem $p(x)=(x-m)r(x)$

„<=” Este evident că dacă $p(x)=(x-m)r(x)$ atunci $p(m)=(m-m)r(m)=0$
deci *m* este rădăcină a polinomului *p(x)*

- Există un rezultat echivalent pentru „rădăcinile matriceale”?
- Ce putem spune despre polinomul $p(x)$ dacă matricea M este rădăcină?
- Poate teorema de mai sus să fie generalizată și pentru matrice?

Teorema 2: *Matricea* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *este rădăcină matriceală a polinomului* $p \in \mathbb{R}[x]$ *dacă și numai dacă există o matrice polinomială* $R \in M_n(\mathbb{R}[x])$ *astfel încât* $p(x)I_n=R(x)(xI_n-M)$

Observație: Dacă $M \in M_n(\mathbb{R})$ este o rădăcină matriceală pentru $p \in \mathbb{R}[x]$, putem construi o demonstrație analogă cu cea din Teorema 1 pentru a arăta că $p(x)I_n=R(x)(xI_n-M)$.

Reciproca însă nu mai este evidentă. Într-adevăr, pentru $p(x)I_n=R(x)(xI_n-M)$ nu putem calcula $P(M)I_n=R(M)(MI_n-M)=0$, deoarece $R(M)$ nu are sens.

Lema 1 : *Fie a, b, c* $\in \mathbb{R}$ *și p*$\in \mathbb{R}[x]$. *Dacă p(x)(x-a)=c, atunci c=0 și p(x)* $\equiv 0$.

Demonstrație:

Fie polinomul $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

Atunci:

$$p(x)(x-a) = b_n x^n (x-a) + b_{n-1} x^{n-1} (x-a) + \ldots + b_1 x (x-a) + b_0 (x-a)$$

și dezvoltând obținem:

$$p(x)(x-a) = b_n x^{n+1} - a b_n x^n + b_{n-1} x^n - a b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^2 - a b_1 x + b_0 x - a b_0$$

Regrupăm termenii și obținem:

$$p(x)(x-a)=b_n x^{n+1}-x^n(b_{n-1}-ab_n)+x^{n-1}(b_{n-2}-ab_{n-1})+\ldots+x^2(b_1-ab_2)+x(b_0-ab_1)-ab_0$$

Dacă acest polinom este constant, trebuie să avem $b_n=0$. Dar dacă $b_n=0$, conchidem din analiza coeficienților lui x_n că $b_{n-1}=0$.

Continuând în acest mod obținem că toți coeficienții lui $p(x)$ trebuie să fie 0 și deci $p(x) \equiv 0$ *și* $c=0$.

Lema 2: *Fie* $A,M \in M_n(\mathbb{R})$ *și* $N \in M_n(\mathbb{R})[x]$ *o matrice polinomială. Dacă* $N(x)(xI_n-A)=M$, *atunci* $M=O_n$ *și* $N(x)=O_n$ *(este matricea polinomială nulă)*

Demonstrație:

Ca în primul exemplu, $N(x)$ poate fi scrisă sub forma:

$$N(x) = N_n x^n + N_{n-1}x^{n-1} + \dots + N_1 x + N_0$$

unde $N_0, N_1, \dots, N_n \in M_n(\mathbb{R})$. Calculând $N(x)(xI_n-A)$ obținem:

$$M = N_n x^n(xI-A)+N_{n-1}x^{n-1}(xI-A)+\dots+N_1 x(xI-A)+N_0(xI-A)$$

$$M = N_n x^{n+1}-N_n x^n A+N_{n-1}x^n-N_{n-1}xn^{-1}A+\dots+N_1x^2-N_1xA+N_0x-N_0A$$

$$M = N_n x^{n+1}-x^n(N_{n-1}-N_nA)+x^{n-1}(N_{n-2}-N_{n-1}A)+\dots+x_2(N_1-N_2A)+x(N_0-N_1A)-N_0A$$

Cum $M \in M_n(\mathbb{R})$, trebuie ca $N_n = O_n$. Dar dacă $N_n = O_n$, concluzionăm din analiza coeficienților lui x_n că $N_{n-1} = O_n$ Continuând în acest mod obținem că toți coeficienții lui $N(x)$ trebuie să fie O_n și deci $N(x) = O_n$ și $M = O_n$.

Acum putem demonstra teorema 2.

Teorema 2: *Matricea* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *este rădăcină matriceală a polinomului* $p \in \mathbb{R}[x]$ *dacă și numai dacă există o matrice polinomială* $R \in M_n(\mathbb{R})[x]$ *astfel încât* $p(x)I_n = R(x)(xI_n - M)$

Demonstrație:

„=>” Fie polinomul $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Presupunem că M este o rădăcină matriceală a lui $p(x)$, deci $p(M) = O_n$

Atunci:

$$p(x)I_n - p(M) = (a_n x^n I_n + a_{n-1} x^{n-1} I_n + \ldots + a_1 x I_n + a_0 I_n) - (a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \ldots + a_1 M + a_0 I_n)$$

$$p(x)I_n - p(M) = a_n(x^n I_n - M^n) + a_{n-1}(x^{n-1} I_n - M^{n-1}) + \ldots + a_1(xI_n - M) + a_0 I_n$$

$$p(x)I_n - p(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x^i I_n - M^i)$$

$$p(x)I_n - p(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x^i I_n - M^i)$$

$$p(x)I_n - p(M) = \sum_{i=2}^{n} a_i\left(x^{i-1}I_n + x^{i-2}I_n M + \ldots + xI_n M^{i-2} + M^{i-1}\right)(xI_n - m) + a_1(xI_n - m)$$

$$p(x)I_n - p(M) = \underbrace{\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\left(x^{i-1}I_n + x^{i-2}I_n M + \ldots + xI_n M^{i-2} + M^{i-1}\right) + a_1\right)}_{Q(x)}(xI_n - M)$$

$p(x)I_n - p(M) = Q(x)(xI_n - M)$

$p(x)I_n = Q(x)(xI_n - M) + p(M)$ (*)

Cum $p(M) = O_n$ obținem $p(x)I_n = Q(x)(xI_n - M)$

Pentru reciproca Teoremei 2, presupunem că $p(x)I_n=R(x)(xI_n-M)$

Din relația (*) rezultă $R(x)(xI_n-M) = Q(x)(xI-M) + p(M)$

de unde obținem:

$p(M) = (R(x)-Q(x))(xI_n-M)$

Cum $p(M) \in M_n(\mathbb{R})$, folosind Lema 2 obținem că $R(x)=Q(x)$ și $p(M)=0$.

Bibliografie:

Damian Kobal, *Matrix zeros of polynomials*, The Mathematical Gazette , Volume 104 , Issue 559 , March 2020 , pp. 27 - 35

Vă mulțumesc!