Asupra rearanjării seriei armonice alternante

Raftu Cristina
Facultatea de Matematică și Informatică-MI
Profesor îndrumător: Conf.univ.dr.Badea Gabriela

Universitatea "Ovidius" Constanța

Înființarea și dezvoltarea CENTRULUI REGIONAL SUD-EST PENTRU ORIENTAREA ÎN CARIERA DE CERCETĂTOR – AD. AUGUSTA - cod 2/16.11.2022

7 decembrie 2024

Introducere

În această prezentare voi trata un caz faimos de serie semiconvergentă:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}}$$

★seria este convergentă conform criteriului lui Leibnitz și are suma $\ln 2$.

★seria nu este însă absolut convergentă deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ care este divergentă.}$$

Propoziția 1

Fie seria $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$ obținută prin rearanjarea termenilor seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (1 termen pozitiv și 2 termeni negativi).Atunci suma seriei este $\frac{1}{2}\ln 2$.

Demonstrație

Notăm S_n =șirul sumelor parțiale a seriei inițiale
T_n =șirul sumelor parțiale a seriei rearanjate

$$T_{3n} = (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + \cdots + (\tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{4n-2}) - \tfrac{1}{4n}$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{4n-2} - \tfrac{1}{4n}$$
$$= \tfrac{1}{2}\underbrace{(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n})}_{S_{2n}}$$

$$S_{2n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots - \tfrac{1}{2n}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \cdots + \tfrac{1}{2n} - (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n})$$
$$= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=?$$

Folosim dubla inegalitate: $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$

Din $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{n-1}$ (1)

Din $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\Rightarrow\ln\frac{2n+1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ (2)

$\xRightarrow{(1)(2)}$ pentru $n>1\Rightarrow\ln\frac{2n+1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{n-1}$

$$\xRightarrow[\text{Criteriul Cleștelui}]{\text{Conform}}\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}T_{3n}=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\lim_{n\to\infty}T_{3n}=\lim_{n\to\infty}T_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}T_{3n+2}$$

$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{1}{2}\ln 2$ □

Propoziția 2

Dacă rearanjăm termenii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ în așa fel încât blocurile cu α termeni pozitivi alternează cu blocurile cu β termeni negativi

$$\overbrace{\overbrace{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\alpha-1}}^{\alpha}-\overbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2\beta}}^{\beta}}^{\alpha+\beta}+\frac{1}{2\alpha+1}+\frac{1}{2\alpha+3}+\cdots+\frac{1}{4\alpha-1}-\frac{1}{2\beta+2}-\frac{1}{2\beta+4}-\cdots-\frac{1}{4\beta}+\cdots$$

, atunci suma seriei este $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}$.

Demonstrație

T_n =șirul sumelor parțiale a seriei rearanjate

Fie $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$

$$T_{1\cdot(\alpha+\beta)} = \overbrace{\overbrace{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\alpha-1}}^{\alpha} - \overbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2\beta}}^{\beta}}^{\alpha+\beta}$$

$= f(2\alpha-1)\underline{-\frac{1}{2}f(\alpha-1)} - \frac{1}{2}f(\beta)$ (scadem t. de dinainte de rang par)

$= f(2\alpha) - \frac{1}{2}f(\alpha) - \frac{1}{2}f(\beta)$

inducție: $T_{n\cdot(\alpha+\beta)} = f(2n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\beta)$
pt $n=1$ adevarat.
Presupunem că egalitatea este adevarată pentru n și vrem să o demonstrăm pentru n+1.

$$T_{(n+1)\cdot(\alpha+\beta)} = f(2n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\beta) + \frac{1}{2n\alpha+1} + \frac{1}{2n\alpha+3} + \cdots + \underline{\frac{1}{2(n+1)\alpha-1}} - \frac{1}{2n\beta+2} - \frac{1}{2n\beta+4} - \cdots - \underline{\frac{1}{2(n+1)\beta}}$$

$$= f(2n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\beta) + \underline{f(2(n+1)\alpha-1)} - \underline{\frac{1}{2}f((n+1)\alpha-1)} -$$

$$\underline{-f(2n\alpha) + \frac{1}{2}f(n\alpha)} \underline{-\frac{1}{2}f((n+1)\beta)} + \underline{\frac{1}{2}f(n\beta)}$$

scadem toti termenii
din cele n blocuri de dinainte

$$= f(2(n+1)\alpha) - \frac{1}{2}f((n+1)\alpha) - \frac{1}{2}f((n+1)\beta).$$

$$\lim_{n\to\infty}(f(n)-\ln n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c$$ (ct. lui Euler)

$$\lim_{n\to\infty} T_{n(\alpha+\beta)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\big(\underbrace{f(2n\alpha)-\ln(2n\alpha)}_{c}\underbrace{-\frac{1}{2}f(n\alpha)+\frac{1}{2}\ln(n\alpha)}_{-\frac{1}{2}c}\underbrace{-\frac{1}{2}f(n\beta)+\frac{1}{2}\ln(n\beta)}_{-\frac{1}{2}c}\big)+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\left(\ln(2n\alpha)-\frac{1}{2}(\ln(n\alpha)+\ln(n\beta))\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n\alpha}{\sqrt{n^2\alpha\beta}}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln 2+\ln\frac{n\alpha}{|n|\sqrt{\alpha\beta}}\right)=\ln 2+\ln\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}}$$

$$=\ln 2+\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{\alpha}{\beta}.$$

pt $k=1,2,3,\cdots,(\alpha+\beta)-1$ avem că $\lim_{n\to\infty} T_{n(\alpha+\beta)+k}=\lim_{n\to\infty} T_{n(\alpha+\beta)}$

$\Rightarrow$ Suma seriei este $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}$ $\square$

Propoziția 3

Suma seriei $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots$ (obținută prin rearanjarea termenilor seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (1 termen pozitiv și 4 termeni negativi)) este 0.

Demonstrație

Este un caz particular cu $\alpha = 1$ si $\beta = 4$

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} = \ln n + \ln \frac{1}{2} = \ln 2 - \ln 2 = 0. \qquad \square$$

Propoziția 4

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ poate fi rearanjată astfel încât să își dubleze suma.

Demontrație

$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\beta} = 2 \ln 2$

$\frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln 2$

$\ln \frac{\alpha}{\beta} = 2 \ln 2$

$\ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln 4 \xrightarrow[\text{bijectivă}]{\ln} \frac{\alpha}{\beta} = 4 \Rightarrow \alpha = 4$ si $\beta = 1$. $\square$

Propoziția 5

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ poate fi rearanjată astfel încât să obținem o serie divergentă.

Demonstrație

$(\bigstar)$ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \leftarrow$ obținut prin rearanjarea termenilor seriei inițiale în așa fel încât n, n$=1,2,3,\cdots$ termeni pozitivi urmați de un termen negativ.

Grupăm termenii seriei $(\bigstar)$ astfel:
$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6})+\cdots$

$(\bigstar\bigstar)$ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{1}{n^2-n+3}+\cdots+\frac{1}{n^2+\underbrace{n-1}}_{-n+(2n-1)}-\frac{1}{2n})$

S_n =șirul sumelor parțiale al seriei $(\bigstar)$
T_n =șirul sumelor parțiale al seriei $(\bigstar\bigstar)$

$$T_n = S_{\frac{(n+1)n}{2}+n} > \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k^2+k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

Folosim urmatoarea inegalitate: $\frac{k}{k^2+k-1} - \frac{1}{2k} > \frac{1}{4k}$

$\frac{k}{k^2+k-1} > \frac{1}{4k} + \frac{1}{2k}$

$\frac{k}{k^2+k-1} > \frac{3}{4k}$

$4k^2 > 3k^2 + 3k - 3$

$k^2 - 3k + 3 > 0$ Adevărat pentru $k \geq 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k^2+k-1} - \frac{1}{2k}\right) > \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty \Rightarrow$Seria este divergentă. $\square$

Bibliografie

- C. Costara, Analysis I(MA1101+MB1101)+ Analysis II(MA1201 + MB1201), Lecture notes by C. Costara (2005-2006) p.64-67
- W.J.Kaczor,M.T.Nowak, Problems in Mathematical Analysis I, Real Numbers and Series, Student Mathematical Library, vol.4, American Mathematical Society p.105-106
- D. Popa, Analiză Matematică, Constanța, 1996

Vă mulțumesc!