Sesiunea de Comunicări Matematice Demonstrații elementare pentru Principiul Mărginirii Uniforme - II

Lungan Andreea-Laura

7 Decembrie 2024

Cuprins

Teoremă: Fie $(X, ||\cdot||)$ spațiu Banach, $(Y, ||\cdot||)$ spațiu normat, $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subseteq L(X;Y)$. Atunci, dacă $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} ||A_\alpha(x)|| < +\infty$, $\forall x \in X$, implică $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} ||A_\alpha|| < +\infty$.

Teoremă: Fie $(X, ||\cdot||)$ spațiu Banach, $(Y, ||\cdot||)$ spațiu normat, $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subseteq L(X;Y)$. Atunci, dacă $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} ||A_\alpha(x)|| < +\infty$, $\forall x \in X$, implică $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} ||A_\alpha|| < +\infty$.

Demonstrație: Presupunem prin reducere la absurd că $(||A_\alpha||)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ nu este mărginită.

Vom construi prin inducție un șir $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ și $(A_{\alpha n})_{n=1}^{+\infty} \subseteq (A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un șir de operatori astfel încât:

$$\begin{cases} ||x_n|| = \frac{1}{4^n}, \forall n \geq 1; \\ ||A_{\alpha n}|| > 3\cdot 4^n \cdot [\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} ||A_{\alpha n}(x_1 + ... + x_{n-1})|| + n], \forall n \geq 1; \\ ||(A_{\alpha n})(x_n)|| > \frac{2}{3}\cdot ||A_{\alpha n}|| \cdot ||x_n||, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Există $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ astfel încât $||A_{\alpha_1}|| > 3\cdot 4\cdot 1$, deci există x_1 cu $||x_1|| = \frac{1}{4}$ astfel încât:
$||(A_{\alpha 1})(x_1)|| > \frac{2}{3}\cdot ||A_{\alpha 1}|| \cdot ||x_1|| > \frac{2}{3}\cdot 12\cdot \frac{1}{4} = 2.$

Presupunem $x_1, ..., x_{n-1} \in X$ și $A_{\alpha 1}, ..., A_{\alpha n-1}$ construiți. Avem:

$$A_{\alpha n}(x) = \underbrace{A_{\alpha n}(x_1 + ... + x_{n-1})}_{\text{partea de trecut}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_n)}_{\text{partea de prezent}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_{n+1} + x_{n+2} + ...)}_{\text{partea de viitor}}.$$

Presupunem $x_1, ..., x_{n-1} \in X$ și $A_{\alpha 1}, ..., A_{\alpha n-1}$ construiți. Avem:

$$A_{\alpha n}(x) = \underbrace{A_{\alpha n}(x_1 + ... + x_{n-1})}_{\text{partea de trecut}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_n)}_{\text{partea de prezent}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_{n+1} + x_{n+2} + ...)}_{\text{partea de viitor}}.$$

Atunci, există $\alpha_n \in \mathcal{A}$ astfel încât

$$||A_{\alpha n}|| > 3 \cdot 4^n \cdot [\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} ||A_\alpha(x_1 + ... + x_{n-1})|| + n],$$

deci există x_n cu $||x_n|| = \frac{1}{4^n}$ astfel încât

$$||(A_{\alpha n})(x_n)|| > \frac{2}{3} \cdot ||A_{\alpha n}|| \cdot ||x_n||.$$

Presupunem $x_1, ..., x_{n-1} \in X$ și $A_{\alpha 1}, ..., A_{\alpha n-1}$ construiți. Avem:

$$A_{\alpha n}(x) = \underbrace{A_{\alpha n}(x_1 + ... + x_{n-1})}_{\text{partea de trecut}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_n)}_{\text{partea de prezent}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_{n+1} + x_{n+2} + ...)}_{\text{partea de viitor}}.$$

Atunci, există $\alpha_n \in \mathcal{A}$ astfel încât

$$||A_{\alpha n}|| > 3 \cdot 4^n \cdot [\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} ||A_\alpha(x_1 + ... + x_{n-1})|| + n],$$

deci există x_n cu $||x_n|| = \frac{1}{4^n}$ astfel încât

$$||(A_{\alpha n})(x_n)|| > \frac{2}{3} \cdot ||A_{\alpha n}|| \cdot ||x_n||.$$

Notăm $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} ||A_\alpha(x_1 + ... + x_{n-1})|| = M_{n-1}$.
Atunci,
$||A_{\alpha n}(x_n)|| > \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 4^n \cdot (M_{n-1} + n) \cdot \frac{1}{4^n} = 2(M_{n-1} + n), \forall n \geq 1.$

Avem $||\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k|| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||x_k|| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^{n+1}}(1 + \frac{1}{4} + ...) = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3} \cdot ||x_n||$.

Avem $||\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k|| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||x_k|| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^{n+1}}(1 + \frac{1}{4} + ...) = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3} \cdot ||x_n||$.
Așadar,

$$||A_{\alpha n}(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k)|| \leq ||A_{\alpha n}|| \cdot ||\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k|| \leq \frac{1}{3} \cdot ||A_{\alpha n}|| \cdot ||x_n||.$$

Deci,
$||(A_{\alpha n})(x_{n+1} + ...)|| \leq \frac{1}{3} \cdot ||A_{\alpha n}|| \cdot ||x_n|| < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot ||A_{\alpha n}(x_n)|| \cdot \frac{1}{||x_n||} \cdot ||x_n|| = \frac{1}{2} \cdot ||A_{\alpha n}(x_n)||, \forall n \geq 1.$

Cum $(X, ||\cdot||)$ este spațiu Banach și $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci va exista $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$. Avem:

$$A_{\alpha n}(x) = \underbrace{A_{\alpha n}(x_1 + ... + x_{n-1})}_{\text{partea de trecut}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_n)}_{\text{partea de prezent}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_{n+1} + x_{n+2} + ...)}_{\text{partea de viitor}}.$$

Cum $(X, ||\cdot||)$ este spațiu Banach și $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci va exista $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$. Avem:

$$A_{\alpha n}(x) = \underbrace{A_{\alpha n}(x_1 + \ldots + x_{n-1})}_{\text{partea de trecut}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_n)}_{\text{partea de prezent}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots)}_{\text{partea de viitor}}.$$

Aplicând inegalitatea triunghiului, obținem, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$||A_{\alpha n}(x)|| \geq ||A_{\alpha n}(x_n)|| - ||A_{\alpha n}(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots)|| - ||A_{\alpha n}(x_1 + \ldots + x_{n-1})||.$$

$$\Rightarrow ||A_{\alpha n}(x)|| \geq \frac{1}{2} \cdot ||A_{\alpha n}(x_n)|| - M_{n-1} > \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (M_{n-1} + n) - M_{n-1} = M_{n-1} + n - M_{n-1} = n.$$

Cum $(X, ||\cdot||)$ este spațiu Banach și $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci va exista $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$. Avem:

$$A_{\alpha n}(x) = \underbrace{A_{\alpha n}(x_1 + ... + x_{n-1})}_{\text{partea de trecut}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_n)}_{\text{partea de prezent}} + \underbrace{A_{\alpha n}(x_{n+1} + x_{n+2} + ...)}_{\text{partea de viitor}}.$$

Aplicând inegalitatea triunghiului, obținem, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$||A_{\alpha n}(x)|| \geq ||A_{\alpha n}(x_n)|| - ||A_{\alpha n}(x_{n+1} + x_{n+2} + ...)|| - ||A_{\alpha n}(x_1 + ... + x_{n-1})||.$$

$\Rightarrow ||A_{\alpha n}(x)|| \geq \frac{1}{2} \cdot ||A_{\alpha n}(x_n)|| - M_{n-1} >$
$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (M_{n-1} + n) - M_{n-1} = M_{n-1} + n - M_{n-1} = n.$
Deci, $||A_{\alpha n}(x)|| \geq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, contradicție.
Așadar, presupunerea facută este falsă $\Rightarrow (||A_\alpha||)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ este mărginită.

Lemă: Fie $T \in L(X; Y)$ un operator liniar și continuu și un punct $x_0 \in X$. Atunci, pentru orice $x \in X$ și $r > 0$ avem că $\sup_{x \in B(x_0, r)} ||T(x)|| \geq ||T|| \cdot r$, unde $B(x_0, r) = \{x \in X : ||x - x_0|| < r\}$.

Lemă: Fie $T \in L(X;Y)$ un operator liniar și continuu și un punct $x_0 \in X$. Atunci, pentru orice $x \in X$ și $r > 0$ avem că $\sup_{x \in B(x_0,r)} ||T(x)|| \geq ||T|| \cdot r$, unde $B(x_0, r) = \{x \in X : ||x - x_0|| < r\}$.

Demonstrație: Pentru $\forall x \in X$,

$$max[||T(x_0 + x)||, ||T(x_0 - x)||] \geq \frac{1}{2} \cdot [||T(x_0 + x)|| + ||T(x_0 - x)||]$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot ||[T(x_0) - T(x)] - [T(x_0) - T(x)]|| = ||T(x)||.$$

Lemă: Fie $T \in L(X;Y)$ un operator liniar și continuu și un punct $x_0 \in X$. Atunci, pentru orice $x \in X$ și $r > 0$ avem că $\sup_{x\in B(x_0,r)} ||T(x)|| \geq ||T|| \cdot r$, unde $B(x_0,r) = \{x \in X : ||x - x_0|| < r\}$.
Demonstrație: Pentru $\forall x \in X$,

$$max[||T(x_0+x)||, ||T(x_0-x)||] \geq \frac{1}{2} \cdot [||T(x_0+x)|| + ||T(x_0-x)||]$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot ||[T(x_0) - T(x)] - [T(x_0) - T(x)]|| = ||T(x)||.$$

Atunci,
$\sup_{y\in B(x_0,r)} ||T(y)|| = sup_{||y||<r} ||T(x_0+y)|| \geq sup_{||x||<r} max[||T(x_0+x)||, ||T(x_0-x)||] \geq sup_{||x||<r} ||T(x)|| = sup_{||z||<1} [||T(z)|| \cdot r] = r \cdot ||T||.$

Teoremă: Fie o familie de operatori liniari și continui $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subseteq L(X;Y)$, unde X este un spațiu Banach și Y un spațiu normat. Dacă $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ este punctual mărginită, atunci $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ este uniform mărginită.

Teoremă: Fie o familie de operatori liniari și continui $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subseteq L(X;Y)$, unde X este un spațiu Banach și Y un spațiu normat. Dacă $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ este punctual mărginită, atunci $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ este uniform mărginită.

Demonstrație: Presupunem, fară a restrânge generalitatea, că $T_\alpha \neq 0, \forall\alpha \in \mathcal{A}$. Presupunem prin reducere la absurd că $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ nu este uniform mărginită.

Atunci, există $(T_{\alpha n})_{n=1}^{+\infty}$ cu $||T_{\alpha n}|| \geq 4^n$.

Fie $x_0 = 0 \in X$. Vrem să construim prin inducție $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq X$ astfel încât:

$$\begin{cases} ||x_n - x_{n-1}|| \leq \frac{1}{3^n}, \forall n \geq 1; \\ ||(T_{\alpha n})(x_n)|| \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot ||T_{\alpha n}||, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Presupunem termenii până la x_{n-1} inclusiv construiți și aplicăm lema pentru centrul x_{n-1} și raza $r = \frac{1}{3^n} > 0$.
Atunci, există $x \in X$ astfel încât:

$$sup_{||x-x_{n-1}||<\frac{1}{3^n}} ||T_{\alpha n}(x)|| \geq \frac{1}{3^n} \cdot ||T_{\alpha n}|| > \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot ||T_{\alpha n}||$$

$\Rightarrow \exists x_n$ cu $||x_n - x_{n-1}|| < \frac{1}{3^n}$, dar $||T_{\alpha n}(x)|| > \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot ||T_{\alpha n}||$.

Pentru $m > n$,

$$\begin{aligned}
||x_m - x_n|| &= ||(x_m - x_{m-1}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)|| \\
&\leq ||x_m - x_{m-1}|| + \ldots + ||x_{n+1} - x_n|| \\
&\leq \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} \\
&\leq \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{m-n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{m-n}}}{1 - \frac{1}{3}} \\
&< \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Deci, am demonstrat că $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq X$ este un șir Cauchy și cum X este spațiu Banach, rezultă că $\exists x$ astfel încât $x_n \to x \in X$.
Atunci, $||x_m - x_n|| < \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2}, \forall m > n$.
Pentru $m \to \infty \Rightarrow ||x - x_n|| \leq \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2}, \forall n > 1$.
Deci $||T_{\alpha n}(x - x_n)|| \leq ||T_{\alpha n}|| \cdot ||x - x_n|| \leq \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2} \cdot ||T_{\alpha n}||$.

Deci, am demonstrat că $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq X$ este un șir Cauchy și cum X este spațiu Banach, rezultă că $\exists x$ astfel încât $x_n \to x \in X$.
Atunci, $||x_m - x_n|| < \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2}, \forall m > n$.
Pentru $m \to \infty \Rightarrow ||x - x_n|| \leq \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2}, \forall n > 1$.
Deci $||T_{\alpha n}(x - x_n)|| \leq ||T_{\alpha n}|| \cdot ||x - x_n|| \leq \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2} \cdot ||T_{\alpha n}||$.
Atunci, din inegalitatea triunghiului răsucită,
$||T_{\alpha n}(x)|| \geq ||T_{\alpha n}(x_n)|| - ||T_{\alpha n}(x - x_n)|| \geq$
$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot ||T_{\alpha n}|| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}||T_{\alpha n}|| \geq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$.
Obținem astfel o contradicție cu ipoteza.
$\Rightarrow (T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ este uniform mărginită.

Bibliografie:

- J. Hennefeld , "A nontopological proof of the uniform boundedness theorem", Amer.Math.Monthly 87, 1980
- Alan D. Sokal, "A Really Simple Elementary Proof of the Uniform Boundedness Theorem", Amer.Math.Monthly 118, 2011