Problema Celor Trei Corpuri

Ioniță Cristina-Aurora

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea "Ovidius" din Constanța

7 Decembrie 2024

Cuprins

Introducere

Problema celor Trei Corpuri

Problema celor Trei Corpuri implică determinarea cu exactitate a mișcării a trei corpuri care interacționează gravitațional între ele și necesită cunoașterea pozițiilor și a vitezelor inițiale pentru a găsi soluții precise.

Problema generală rămâne nerezolvată complet până în prezent.În sistemul centrului de masă, ecuațiile de mișcare sunt foarte complexe; există conservarea energiei și a momentului unghiular.

Definiția Problemei

Problema generaă a celor trei corpuri

La fel ca în problema celor două corpuri, este mai convenabil să se lucreze în sistemul centrului de masă (CM), cu x_i reprezentând poziția masei m_i. Ecuațiile newtoniene ale mișcării în acest sistem sunt de forma:

$$\ddot{x}_i = -Gm_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} - Gm_k \frac{x_i - x_k}{|x_i - x_k|^3} \tag{1}$$

unde i,j,k reprezintă 1, 2, 3 și cele două permutări ordonate ale acestor indici. Aceste trei ecuații diferențiale vectoriale de ordinul al doilea sunt echivalent cu 18 ecuații diferențiale scalare de ordinul întâi.

Definiția Problemei

Problema generaă a celor trei corpuri

Condiția CM și prima sa derivată:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{x}_i = 0 \tag{3}$$

sunt 6 costrângeri care reduc ordinarea sistemului la 12. În absența forțelor și a cuplurilor externe, energia și momentul unghiular sunt cantități conservate sau integrale ale mișării. Acestea reduc și mai mult ordinea sistemului la 8.Ca și în cazul problemei cu două corpuri, se poate elimina timpul și se poate reduce din nou la 6. Chiar dacă mișcarea ar fi limitată la un plan fixat în spațiu, ordinea se reduce la 4, ceea ce este în continuare imposibil de rezolvat în general.

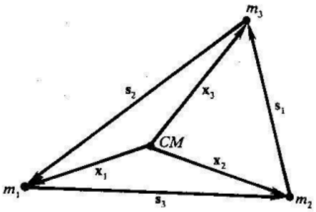

Figura 1: Vectori de poziție în sistemul CM și vectori de poziție relativă pentru problema celor trei corpuri (Hestenes 1987).

Problema generală a celor trei corpuri

În 1973, Broucke și Lass și-au dat seama că ecuațiile mișcării pot fi scrise într-o formă mai simetrică prin utilizarea vectorilor de poziție relativă $s_i = x_j - x_k$, etichetați astfel încât s_i este latura opusă triunghiului care conține masa m_i și că

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0. \tag{4}$$

În termenii acestor vectori de poziție relativă, ecuațiile de mișcare (1) adoptă forma simetrică

$$\ddot{s}_i = -GM\frac{s_i}{s_i^3} + m_i\mathbf{G}, \tag{5}$$

unde $M = m_1 + m_2 + m_3$ este masa totală, iar vectorul $\mathbf{G}$ este dat de

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{3} \frac{s_i}{s_i^3} \tag{6}$$

Cel de-al doilea termen este responsabil pentru dificultatea acestei probleme, deoarece el cuplează ecuațiile pentru s_i.

Soluția lui Euler

Dacă toate particulele sunt coliniare, toți vectorii s_i, x_i și $\mathbf{G}$ sunt proporționali între ei. Fără a pierde generalitatea, să presupunem că m_2 se află între celelalte două mase. Atunci s_3 punctează de la m_1 la m_2, s_1 punctează în aceeași direcție și sens ca s_3 de la m_2 la m_3, iar s_2 punctează înapoi de la m_3 la m_1. Prin urmare, putem scrie

$$s_1 = \lambda s_3, \quad s_2 = -(1+\lambda) s_3, \tag{7}$$

unde λ este un scalar pozitiv.

Soluții Speciale

Soluția lui Euler

Exprimând totul în ecuațiile de mișcare în termeni de s_3 și λ, se obține după o anumită algebră, un polinom de gradul 5 în λ cu o singură rădăcină reală pozitivă, care este o funcție a celor 3 mase; iar s_3 se supune unei ecuații cu două corpuri de forma:

$$\ddot{s}_3 = -\frac{m_2 + m_3(1+\lambda)^{-2}}{m_2 + m_3(1+\lambda)} \frac{GMs_3}{s_3^3} \tag{8}$$

Astfel, particulele se deplasează de-a lungul unor elipse confocale cu aceeași excentricitate și cu aceeași perioadă orbitală în jurul centrului comun de masă, întotdeauna aliniate și separate de distanțe care respectă ecuația (7). Aceasta descrie o familie de soluții. Celelalte două familii pot fi găsite punând una dintre celelalte particule în mijloc. Aceste soluții coliniare nu sunt realizate în natură deoarece sunt instabile la perturbații mici.

Soluții Speciale

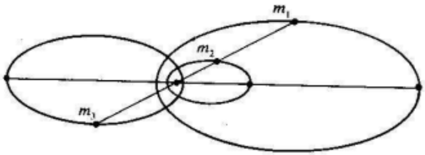

Figura 2: Soluția coliniară a lui Euler pentru mase în raportul $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 2 : 3$ (Hestenes 1987).

Soluții Speciale

Soluția lui Lagrange

Acest caz este realizat atunci când **G**=0 și ecuațiile pentru s_i se decuplează. Cele 3 ecuații decuplate au forma celor 2 corpuri ale căror soluții sunt elipse pentru cazurile limită. Condiția pentru **G**=0 este ca $s_1 = s_2 = s_3$; cu alte cuvinte, particulele se află tot timpul la vârfurile unui triunghi echilateral, chiar dacă acest triunghi își schimbă dimensiunea și se rotește. Fiecare particulă urmează o elipsă cu aceeași excentricitate, dar orientată la unghiuri diferite, cu centrul de masă comun în punctul focal al celor trei orbite.

Soluții Speciale

Soluția lui Lagrange

Mișcarea este periodică, cu aceeași perioadă pentru toate cele 3 particule. Soluția Lagrange este stabilă dacă una dintre cele trei mase este mult mai mare decât celelalte două. Montgomery(2001) descrie mai multe alte soluții care există atunci când toate particulele au aceeași masă, de exemplu, o soluție în formă de opt pentru 3 particule, care este stabilă și soluții mai complicate cu până la unsprezece particule. Acestea au o importanță practică foarte redusă, deoarece necesită condiții inițiale particulare pentru a fi realizate.

Problema pitagoreică

Burrau(1913) a considerat o configurație inițială bine definită, dar selectată arbitrar, de trei corpuri cu masele 3, 4 și 5 plasate la colțurile unui triunghi pitagoreic cu laturile de lungime proporțională pentru fiecare masă.

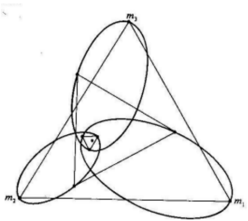

Figura 3: Soluția triunghiului echilateral al lui Lagrange pentru mase în raportul $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 2 : 3$ (Hestenes 1987).

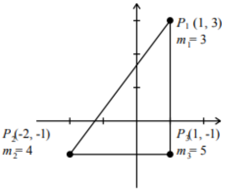

Figura 4: Configurația inițială pentru problema pitagoreică a lui Burrau prezentată în cadrul de referință CM. Masele sunt în raportul $m_1 : m_2 : m_3 = 3 : 4 : 5$ și sunt eliberate din repaus (Valtonen & Karttunen 2006).

Problema pitagoreică

Masele sunt inițial în repaus și încep să se miște datorită atracției lor reciproce. După o interacțiune foarte complexă, cele două mase mai grele se leagă într-un binar stabil, în timp ce obiectul ușor scapă, iar toate particulele se îndepărtează fără limită de centrul comun de masă.

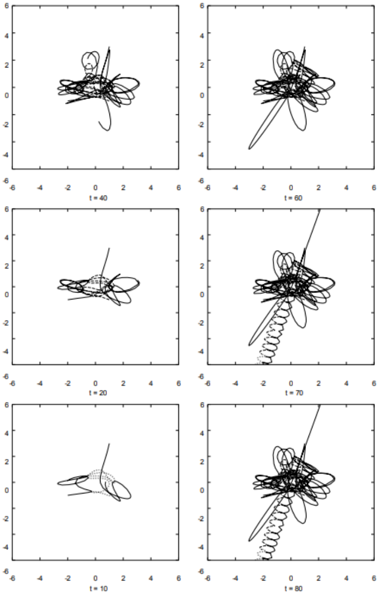

Figura 5: Traiectorii pentru problema pitagoreică a lui Burrau prezentate în cadrul de referință CM. Ultimele două panouri sunt identice, deoarece atât particula binară, cât și particula de lumină au părăsit cadrul (Valtonen & Karttunen 2006).

Problema Pitagoreică

Acest comportament se dovedește a fi destul de comun atunci când trei particule cu mase aproximativ comparabile sunt lăsate să interacționeze gravitațional cu condiții inițiale selectate aleatoriu. Experimentele moderne pe calculator au explorat rezultatele a sute de mii de configurații inițiale și au permis dezvoltarea unei înțelegeri statistice a interacțiunilor dintre trei particule.

Concluzii

Concluzii

În concluzie, Problema Celor Trei Corpuri rămâne o provocare fundamentală în fizică și astronomie modernă. Deși nu există o soluție analitică generală, progresele în tehnolgia de calcul au permis simulări numerice complexe care au îmbunătățit semnificativ înțelegerea comportamentului acestor sisteme. Aplicațiile practicte sunt diverse, incluzând:

- Calcul precis al orbitelor sonderlor și sateliților spațiali;
- Studiul dinamicii sistemelor stelare multiple;
- Analiza structurii și stabilității nucleelor galaxiilor active;
- Modelarea configurațiilor orbitale ale sistemelor exoplanetare.

Cercetarea continuă asupra acestei probleme clasice rămâne esențială pentru progresele în astrofizică, explorarea spațială și înțelegerea evoluției sistemelor astronomice complexe.

Bibliografie

Bibliografie

- https://www.phys.lsu.edu/faculty/gonzalez/Teaching/Phys7221/ThreeBodyProblem.pdf;
- Montgomery, R., 2001, A New Solution to the Three-Body Problem, Not. Am. Math. Soc. 48, 471-481;
- Hestenes, D., 1987 and 1999, New Foundations for Classical Mechanics, 1st and 2nd ed.
- Valtonen, M. and Karttunen, H., 2006, The Three-Body Problem, Cambridge University Press.

Vă mulțumesc pentru atenția acordată!