O metodă pentru a demonstra iraționalitatea unor numere reale - II

Ionescu Andreea

Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Ovidius din Constanța

Sesiunea de comunicări matematice - 7 Decembrie 2024

Cuprins

Demonstrăm că π este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin(\pi x)$.

Demonstrăm că π este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin(\pi x)$.
Vrem să evaluăm integrala $\int_0^1 x^j f(x)\, dx$, mai exact notăm cu

$$\mathrm{I}_j = \int_0^1 x^j \sin(\pi x)\, dx$$

Demonstrăm că π este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin(\pi x)$.
Vrem să evaluăm integrala $\int_0^1 x^j f(x)\,dx$, mai exact notăm cu

$$\mathrm{I}_j = \int_0^1 x^j \sin(\pi x)\,dx$$

Aplicăm integrarea prin părți de 2 ori și obținem:

$$I_j = \frac{1}{\pi} + \frac{j}{\pi}\int_0^1 x^{j-1}\cos(\pi x)\,dx =$$

Demonstrăm că π este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin(\pi x)$.
Vrem să evaluăm integrala $\int_0^1 x^j f(x)\,dx$, mai exact notăm cu

$$\mathrm{I}_j = \int_0^1 x^j \sin(\pi x)\,dx$$

Aplicăm integrarea prin părți de 2 ori și obținem:

$$I_j = \frac{1}{\pi} + \frac{j}{\pi}\int_0^1 x^{j-1}\cos(\pi x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} + \frac{j(j-1)}{\pi^2}\int_0^1 x^{j-2}\sin(\pi x)\,dx.$$

Astfel, obținem recurența:

$$I_j = \frac{1}{\pi} + \frac{j(j-1)}{\pi^2} I_{j-2}.$$

Prin iterație, în funcție de paritatea lui j, ajungem la:

$$I_0 = \int_0^1 \sin(\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi}.$$

sau

$$I_1 = \int_0^1 x \sin(\pi x)\, dx = \frac{1}{\pi}.$$

Presupunem prin reducere la absurd că $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$. Atunci, $\int_0^1 x^j \sin(\pi x)\, dx \in \mathbb{Q}$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Atunci, $\int_0^1 x^j \sin(\pi x)\, dx \in \mathbb{Q}$.
Deci, $\int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{B_n} \in \mathbb{Q}$, unde A$_n \in \mathbb{Z}$ și B$_n \in \mathbb{Z}^*$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Atunci, $\int_0^1 x^j \sin(\pi x)\, dx \in \mathbb{Q}$.
Deci, $\int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{B_n} \in \mathbb{Q}$, unde $\mathrm{A}_n \in \mathbb{Z}$ și $\mathrm{B}_n \in \mathbb{Z}^*$.
Avem $\mathrm{B}_n = a^n$.
$\Rightarrow \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{a^n}$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Atunci, $\int_0^1 x^j \sin(\pi x)\, dx \in \mathbb{Q}$.
Deci, $\int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{B_n} \in \mathbb{Q}$, unde $\mathrm{A}_n \in \mathbb{Z}$ și $\mathrm{B}_n \in \mathbb{Z}^*$.
Avem $\mathrm{B}_n = a^n$.
$\Rightarrow \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{a^n}$.
Avem nevoie ca $\mathrm{A}_n \neq 0$. Pentru n par,
$\mathrm{A}_n = a^n \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx =$
$= a^n \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n} (\sin(\pi x)))\, dx \neq 0$.
Astfel,
$1 \leq |A_n| = |a^n \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx| =$

Presupunem prin reducere la absurd că $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Atunci, $\int_0^1 x^j \sin(\pi x)\, dx \in \mathbb{Q}$.
Deci, $\int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{B_n} \in \mathbb{Q}$, unde A$_n \in \mathbb{Z}$ și B$_n \in \mathbb{Z}^*$.
Avem B$_n = a^n$.
$\Rightarrow \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{a^n}$.
Avem nevoie ca A$_n \neq 0$. Pentru n par,
A$_n = a^n \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx =$
$=a^n \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n} (\sin(\pi x)))\, dx \neq 0$.
Astfel,
$1 \leq |A_n| = |a^n \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx| =$
$=|a^n \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n} (\sin(\pi x)))\, dx| =$

Presupunem prin reducere la absurd că $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Atunci, $\int_0^1 x^j \sin(\pi x)\, dx \in \mathbb{Q}$.
Deci, $\int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{B_n} \in \mathbb{Q}$, unde $\mathrm{A}_n \in \mathbb{Z}$ și $\mathrm{B}_n \in \mathbb{Z}^*$.
Avem $\mathrm{B}_n = a^n$.
$\Rightarrow \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = \frac{A_n}{a^n}$.
Avem nevoie ca $\mathrm{A}_n \neq 0$. Pentru n par,
$\mathrm{A}_n = a^n \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx =$
$= a^n \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n}(\sin(\pi x)))\, dx \neq 0$.
Astfel,
$1 \leq |A_n| = |a^n \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx| =$
$= |a^n \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n}(\sin(\pi x)))\, dx| =$
$= |a^n \int_0^1 (\frac{1}{n!} [x \cdot (1-x)]^n \pi^n)\, dx|$.

Cum

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}, \forall\ x \in [0,1].$$

Deci,

$$1 \leq |a^n \int_0^1 (\frac{1}{n!}(\frac{1}{4})^n \pi^n)\, dx| = |a^n \frac{1}{n!}(\frac{\pi}{4})^n|.$$

Cum

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}, \forall \text{ x} \in [0,1].$$

Deci,

$$1 \leq |a^n \int_0^1 (\frac{1}{n!}(\frac{1}{4})^n \pi^n)\, dx| = |a^n \frac{1}{n!}(\frac{\pi}{4})^n|.$$

Dar,

$$\lim_{n\to\infty}(a^n \frac{1}{n!}(\frac{\pi}{4})^n) = 0.$$

Cum

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}, \forall\, x \in [0,1].$$

Deci,

$$1 \leq \left|a^n \int_0^1 \left(\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{4}\right)^n \pi^n\right) dx\right| = \left|a^n \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\right|.$$

Dar,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^n \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\right) = 0.$$

Contradicție $\Rightarrow \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstrăm că $\ln 2$ este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Demonstrăm că ln 2 este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Vrem să evaluăm integrala $\int_0^1 x^j f(x)\,dx$, mai exact $\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx$.

Demonstrăm că $\ln 2$ este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Vrem să evaluăm integrala $\int_0^1 x^j f(x)\, dx$, mai exact $\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\, dx$.
Aplicăm Algoritmul lui Euclid,
$x^j = (1+x)\left(x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1\right) \pm 1.$

Demonstrăm că $\ln 2$ este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Vrem să evaluăm integrala $\int_0^1 x^j f(x)\,dx$, mai exact $\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx$.
Aplicăm Algoritmul lui Euclid,
$x^j = (1+x)\left(x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1\right) \pm 1.$
$\frac{x^j}{1+x} = x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1 \pm \frac{1}{1+x}.$

Demonstrăm că $\ln 2$ este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Vrem să evaluăm integrala $\int_0^1 x^j f(x)\,dx$, mai exact $\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx$.
Aplicăm Algoritmul lui Euclid,
$x^j = (1+x)\left(x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1\right) \pm 1.$
$\frac{x^j}{1+x} = x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1 \pm \frac{1}{1+x}.$
$\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx = \int_0^1 (x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1 \pm \frac{1}{1+x})dx.$

Demonstrăm că ln 2 este irațional

Definim $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Vrem să evaluăm integrala $\int_0^1 x^j f(x)\,dx$, mai exact $\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx$.
Aplicăm Algoritmul lui Euclid,
$x^j = (1+x)\left(x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1\right) \pm 1$.
$\frac{x^j}{1+x} = x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1 \pm \frac{1}{1+x}$.
$\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx = \int_0^1 (x^{j-1} - x^{j-2} + \cdots \mp 1 \pm \frac{1}{1+x})dx$.
$\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx = \frac{1}{j} - \frac{1}{j-1} + \cdots \mp 1 \pm \ln 2$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\ln 2 \in \mathbb{Q}$

Presupunem prin reducere la absurd că $\ln 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ln 2 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\ln 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ln 2 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Notăm $d_j = c.m.m.m.c \{1, 2, \cdots, j\}$, $\forall$ j $\in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\ln 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ln 2 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Notăm $d_j = c.m.m.m.c\{1, 2, \cdots, j\}, \forall$ j $\in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Atunci $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}$ astfel încât
$\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\, dx = \frac{\alpha}{d_j} \pm \frac{a}{b} = \frac{\alpha b \pm a d_j}{b d_j} \in \mathbb{Q}$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\ln 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ln 2 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Notăm $d_j = c.m.m.m.c\,\{1, 2, \cdots, j\}$, $\forall$ j $\in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Atunci $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}$ astfel încât
$\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx = \frac{\alpha}{d_j} \pm \frac{a}{b} = \frac{\alpha b \pm a d_j}{b d_j} \in \mathbb{Q}$.
Deci, $\int_0^1 P_n(x) f(x)\,dx = \frac{A_n}{B_n} \in \mathbb{Q}$, unde $A_n \in \mathbb{Z}$ și $B_n \in \mathbb{Z}^*$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\ln 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ln 2 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Notăm $d_j = c.m.m.m.c \{1, 2, \cdots, j\}, \forall$ j $\in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Atunci $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}$ astfel încât
$\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\, dx = \frac{\alpha}{d_j} \pm \frac{a}{b} = \frac{\alpha b \pm a d_j}{b d_j} \in \mathbb{Q}$.
Deci, $\int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx = \frac{A_n}{B_n} \in \mathbb{Q}$, unde $A_n \in \mathbb{Z}$ și $B_n \in \mathbb{Z}^*$.
$\Rightarrow B_n = b d_n$.

Presupunem prin reducere la absurd că $\ln 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ln 2 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, unde a,b $\in \mathbb{N}^*$.
Notăm $d_j = c.m.m.m.c\,\{1, 2, \cdots, j\}, \forall$ j $\in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Atunci $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}$ astfel încât
$\int_0^1 \frac{x^j}{1+x}\,dx = \frac{\alpha}{d_j} \pm \frac{a}{b} = \frac{\alpha b \pm a d_j}{b d_j} \in \mathbb{Q}$.
Deci, $\int_0^1 P_n(x) f(x)\,dx = \frac{A_n}{B_n} \in \mathbb{Q}$, unde $A_n \in \mathbb{Z}$ și $B_n \in \mathbb{Z}^*$.
$\Rightarrow B_n = b d_n$.
$\Rightarrow \int_0^1 P_n(x) f(x)\,dx = \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_n}{b d_n}$.

Vrem $A_n \neq 0$,
$A_n = (bd_n) \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx =$

Vrem $A_n \neq 0$,
$A_n = (bd_n) \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx =$
$=(bd_n) \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n (\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\, dx =$

Vrem $A_n \neq 0$,
$A_n = (bd_n) \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx =$
$=(bd_n) \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n (\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\, dx =$
$=(bd_n) \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n (-1)^n n! \frac{1}{(1+x)^{n+1}})\, dx.$

Vrem $A_n \neq 0$,

$A_n = (bd_n) \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx =$

$=(bd_n) \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n (\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\, dx =$

$=(bd_n) \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n (-1)^n n! \frac{1}{(1+x)^{n+1}})\, dx.$

Deci, obținem:

$1 \leq |A_n| = |(bd_n) \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx| =$

Vrem $A_n \neq 0$,

$A_n = (bd_n) \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx =$

$=(bd_n) \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n (\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\, dx =$

$=(bd_n) \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n (-1)^n n! \frac{1}{(1+x)^{n+1}})\, dx.$

Deci, obținem:

$1 \leq |A_n| = |(bd_n) \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx| =$

$=|(bd_n) \int_0^1 (\frac{1}{n!} x^n (1-x)^n (\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\, dx| =$

Vrem $A_n \neq 0$,

$A_n = (bd_n)\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx =$

$=(bd_n)\int_0^1 (\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n(\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\,dx =$

$=(bd_n)\int_0^1 (\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n(-1)^n n!\frac{1}{(1+x)^{n+1}})\,dx.$

Deci, obținem:

$1 \leq |A_n| = |(bd_n)\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx| =$

$=|(bd_n)\int_0^1 (\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n(\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\,dx| =$

$=|(bd_n)\int_0^1 (\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n(-1)^n n!\frac{1}{(1+x)^{n+1}})\,dx| =$

Vrem $A_n \neq 0$,

$A_n = (bd_n)\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx =$

$=(bd_n)\int_0^1 (\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n(\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\,dx =$

$=(bd_n)\int_0^1 (\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n(-1)^n n!\frac{1}{(1+x)^{n+1}})\,dx.$

Deci, obținem:

$1 \leq |A_n| = |(bd_n)\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx| =$

$=|(bd_n)\int_0^1 (\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n(\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{1+x})))\,dx| =$

$=|(bd_n)\int_0^1 (\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n(-1)^n n!\frac{1}{(1+x)^{n+1}})\,dx| =$

$=|(bd_n)\int_0^1 (\left(\frac{x(1-x)}{1+x}\right)^n \frac{1}{1+x})\,dx|.$

Pentru $g(x) = \frac{x(1-x)}{1+x}$, $\forall$ x $\in [0, 1]$.

Pentru $g(x) = \frac{x(1-x)}{1+x}$, $\forall$ x $\in [0, 1]$.
Obținem, g(x)$_{max} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Pentru $g(x) = \frac{x(1-x)}{1+x}$, $\forall$ x $\in [0, 1]$.
Obținem, $g(x)_{max} = 3 - 2\sqrt{2}$.
Folosim rezultatul: $d_n \leq 3^n$.

Pentru $g(x) = \frac{x(1-x)}{1+x}$, $\forall$ x $\in [0, 1]$.
Obținem, $g(x)_{max} = 3 - 2\sqrt{2}$.
Folosim rezultatul: $d_n \leq 3^n$.
Apoi, avem
$1 \leq |A_n| \leq |(b \cdot 3^n) \int_0^1 [(3 - 2\sqrt{2})^n \frac{1}{1+x}]\, dx|$

Pentru $g(x) = \frac{x(1-x)}{1+x}$, $\forall$ x $\in [0,1]$.
Obținem, $g(x)_{max} = 3 - 2\sqrt{2}$.
Folosim rezultatul: $d_n \leq 3^n$.
Apoi, avem
$1 \leq |A_n| \leq |(b \cdot 3^n) \int_0^1 [(3-2\sqrt{2})^n \frac{1}{1+x}]\, dx|$
$= |b| \cdot [3(3-2\sqrt{2})]^n | \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx|$

Pentru $g(x) = \frac{x(1-x)}{1+x}$, $\forall$ x $\in [0,1]$.
Obținem, $g(x)_{max} = 3 - 2\sqrt{2}$.
Folosim rezultatul: $d_n \leq 3^n$.
Apoi, avem

$$1 \leq |A_n| \leq |(b \cdot 3^n) \int_0^1 [(3-2\sqrt{2})^n \frac{1}{1+x}]\, dx|$$
$$=|b| \cdot [3(3-2\sqrt{2})]^n | \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx|$$
$$=|b| \cdot [3(3-2\sqrt{2})]^n \cdot \ln 2$$

Pentru $g(x) = \frac{x(1-x)}{1+x}$, $\forall$ x $\in [0,1]$.
Obținem, $g(x)_{max} = 3 - 2\sqrt{2}$.
Folosim rezultatul: $d_n \leq 3^n$.
Apoi, avem
$1 \leq |A_n| \leq |(b \cdot 3^n) \int_0^1 [(3 - 2\sqrt{2})^n \frac{1}{1+x}]\, dx|$
$=|b| \cdot [3(3 - 2\sqrt{2})]^n | \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx|$
$=|b| \cdot [3(3 - 2\sqrt{2})]^n \cdot \ln 2$
Dar, $\lim_{n\to\infty} [3(3 - 2\sqrt{2})]^n = 0$.

Pentru $g(x) = \frac{x(1-x)}{1+x}$, $\forall$ x $\in [0, 1]$.
Obținem, $g(x)_{max} = 3 - 2\sqrt{2}$.
Folosim rezultatul: $d_n \leq 3^n$.
Apoi, avem
$1 \leq |A_n| \leq |(b \cdot 3^n) \int_0^1 [(3-2\sqrt{2})^n \frac{1}{1+x}]\, dx|$
$=|b| \cdot [3(3-2\sqrt{2})]^n | \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx|$
$=|b| \cdot [3(3-2\sqrt{2})]^n \cdot \ln 2$
Dar, $\lim_{n\to\infty}[3(3-2\sqrt{2})]^n = 0$.
Contradicție $\Rightarrow \ln 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Bibliografie

1. Dirk Huylebrouck, Similarities in Irrationality Proofs for π, $\ln 2$, $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 3 (Mar.,2001), pp. 222-231.
2. J.M. Borwein and P.B. Borwein, Pi and the Agm: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity, Wiley, New York, 1987.

Vă mulțumesc pentru atenție!