O metodă pentru a demonstra iraţionalitatea unor numere reale - I

Realizat de: Hîrdău Elena

Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea "Ovidius" din Constanța
Specializarea: Matematică-Informatică, An II

7 Decembrie 2024

Cuprins

Motivaţie
• *Scurt istoric*

Problematica iraționalității lui π a dominat o bună perioadă de circa 2000 de ani din istoria matematicii, începând cu problema "Cuadratura cercului", a grecilor antici : cum să construiești un pătrat care să aibă aria egală cu aria unui cerc oarecare, folosind o linie și un compas?

În 1768, Johann Lambert a demonstrat că π este irațional, iar în 1771, Joseph Fourier a dovedit că logaritmul natural al lui 2, adică $\ln(2)$, este irațional.

În articolul "Similarities in Irrationality Proofs...", autorul, Dirk Huylebrouck, ne prezintă o abordare matematică prin care se poate demonstra, folosind aceeași bază, iraționalitatea a 4 constante matematice fundamentale: π, $ln2$, $\zeta(2)$ și $\zeta(3)$.

Motivaţie
• *Cele 4 numere remarcabile*

În această prezentare ne vom concentra asupra iraționalității a 2 constante matematice bine cunoscute, ce se pot exprima sub forma unor serii standard:

- π, unde $\frac{\pi}{4} = 1$ - $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} +$ ... $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (seria lui Leibniz)
- $\ln(2) = 1$ - $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4} +$ ... $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0.693147\ldots$

Cu toate acestea, este important să menționăm și alte 2 constante de interes, date de funcția zeta Riemann, pentru:

s=2: $\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

și

s=3: $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

.. a căror iraționalitate reiese folosind un procedeu similar cu cel pe care urmează să îl abordăm in cazul primelor 2 numere.

Motivaţie

• *Functia zeta Riemann*

În matematică, funcția zeta Riemann, numită după matematicianul german Bernhard Riemann, este o funcție cu semnificație importantă în teoria numerelor din cauza relației pe care o are cu distribuția numerelor prime.

Are aplicații și în alte domenii cum ar fi fizica, teoria probabilităților, și în statistică aplicată.

Funcția zeta Riemann $\zeta(s)$ este o funcție de variabilă complexă s, inițial definită prin următoarea serie infinită:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

...pentru anumite valori ale lui s, și apoi continuată analitic la toate numerele complexe s $\neq$ 1. Această serie Dirichlet converge pentru toate valorile reale ale lui s mai mari ca 1.

Metodă generală
"Cele 4 demonstraţii în una singură"

În cartea "Pi and the Agm: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity", autorii, J.M. Borwein and P.B. Borwein au demonstrat iraționalitatea acestor 4 numere.

Dirk Huylebrouck observă existența unor similitudini între tehnicile utilizate în cele 4 cazuri, și, pentru a face asemănarea lor mai evidentă, în articolul său, rezumă punctele importante, elaborând o "Demonstrație generală".

• Să presupunem că trebuie arătată iraționalitatea unui număr unui număr real ξ.

• În acest sens, considerăm o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, asupra căreia vom impune, pe parcurs, mai multe condiții.

! O primă astfel de proprietate este posibilitatea scrierii următoarei familii de integrale $(j \in \mathbb{N})$ sub forma unui polinom în ξ, cu coeficienți raționali:

$$\int_0^1 x^j f(x)\, dx = P_j(\xi) \qquad (\forall\, j \in \mathbb{N},\ \ P_j \in \mathbb{Q}[x])$$

Să presupunem prin reducere la absurb că: $\xi \in \mathbb{Q}$.
Așadar, rezultatul devine rațional:

$$\int_0^1 x^j f(x)\, dx = \frac{C_j}{D_j} \ , \quad \mathsf{C}_j \in \mathbb{Z}, D_j \in \mathbb{N}^*$$

Deci,

$$\int_0^1 P(x) f(x)\, dx \in \mathbb{Q}, \quad \forall P \in \mathbb{Q}[x],$$

Unde, $\mathbb{Q}[x]$ este mulțimea polinoamelor cu coeficienți raționali.

Atunci, aplicăm această proprietate pentru polinomul lui Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left[(x)^n(1-x)^n\right]^{(n)}$$

Astfel, pentru familia de integrale propusă:

$$\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx = \frac{A_n}{B_n}, \quad A_n \in \mathbb{Z}^*, B_n \in \mathbb{N}^*$$

Integrarea prin părți de n ori duce la:

$$\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 [x^n(1-x)^n]f^{(n)}(x)dx.$$

Deoarece $A_n \in \mathbb{Z}^*$, obținem inegalitatea:

$$1 \leq |A_n| = |B_n| \cdot |\int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx| =$$

$$= |B_n| \cdot |\tfrac{1}{n!}| \cdot |\int_0^1 [x^n(1-x)^n]f^{(n)}(x)dx| \qquad (1)$$

Notând $x(1-x) = g(x)$, și $f^{(n)}(x) = h_n(x)$, obținem:

$$|\int_0^1 [x^n(1-x)^n]f^{(n)}(x)dx| = |\int_0^1 [(g(x))^n]h_n(x)dx| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |g(x)|^n \cdot |h_n(x)|dx \leq M^n \cdot \int_0^1 |h_n(x)|dx$$

Unde,

$$M = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x(1-x)| = \frac{1}{4}, \quad \hat{\imath}n\ x = \frac{1}{2}$$

Astfel, inegalitatea (1) devine:

$$1 \leq |A_n| = |B_n| \cdot \tfrac{1}{n!} \cdot (\tfrac{1}{4})^n \cdot \int_0^1 |h_n(x)| dx \tag{2}$$

Pentru $n \to \infty$, avem convergența:

$$|B_n| \cdot \tfrac{1}{n!} \cdot (\tfrac{1}{4})^n \cdot \int_0^1 |h_n(x)| dx \to 0 \tag{3}$$

Cu ajutorul relațiilor (2) și (3), obținem o contradicție clară, așadar, putem afirma faptul că ideea de la care am pornit ($\xi \in \mathbb{Q}$) este falsă. Am demonstrat iraționalitatea numărului real ξ.

Bibliografie

1. Dirk Huylebrouck, Similarities in Irrationality Proofs for π, $\ln 2$,2 and 3, The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 3 (Mar.,2001), pp. 222-231.

2. J.M. Borwein and P.B. Borwein, Pi and the Agm: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity, Wiley, New York, 1987.

Sfârșitul prezentării!

Vă mulțumesc pentru atenție!