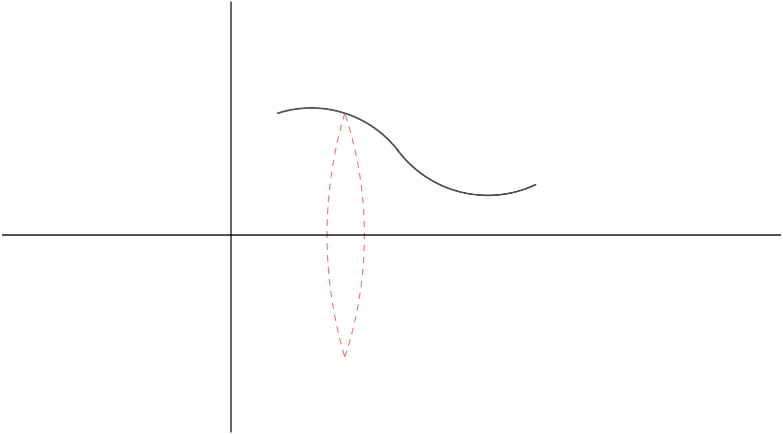
Cuadricele, obținute ca rotații ale conicelor

Rareș Gurzu

7 decembrie, 2024

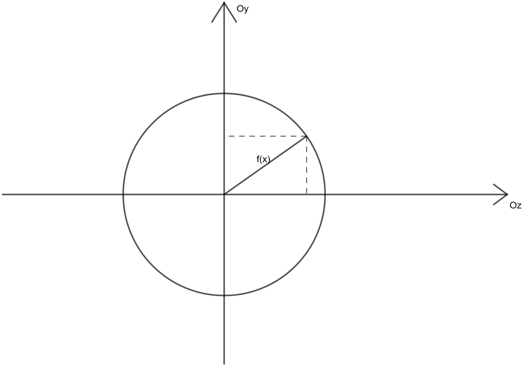
Rotirea unei curbe în jurul axei Ox

Fie $f : D \to \mathbf{R}$. Vom considera curba dată de Gf și vom încerca să o rotim în jurul axei Ox. Evident, obiectul obținut va fi o suprafață bidimensională



Rotirea unei curbe în jurul axei Ox

Pentru a reuși această rotație, este suficient să ne uităm la secțiunile transversale ale suprafeței obținute. În cazul acesta, fiecare secțiune va fi un cerc.



De remarcat este faptul că ecuația acestui cerc este

$$y^2 + z^2 = f^2(x)$$

Rotirea conicelor

Vom considera funcții ce au graficele conice, sau secțiuni de conice și le vom roti pe traiectorii tot de conice. Prin urmare, vom lua în considerare următoarele funcții:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f : [-1, 1] \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

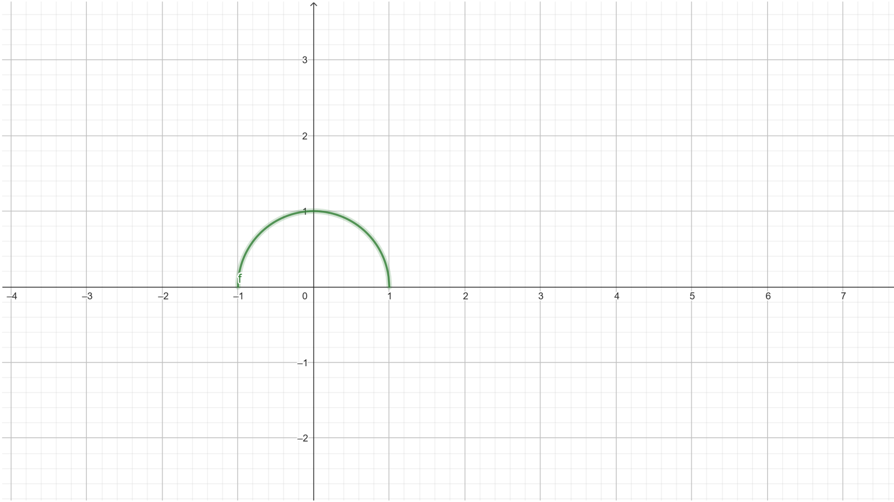
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow f : [-b, b] \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y^2 = 4ax \Rightarrow f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = 2\sqrt{ax}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow f : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Rotirea cercului

Funcția considerată este
$f : [-1,1] \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{1-x^2}$, iar graficul ei este un semicerc.



Rotirea cercului

Rotind semicercul în yOz pe traiectoria unui cerc în yOz, vom obține secțiunea transversală, dată de ecuația

$$y^2 + z^2 = f^2(x) \Leftrightarrow y^2 + z^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

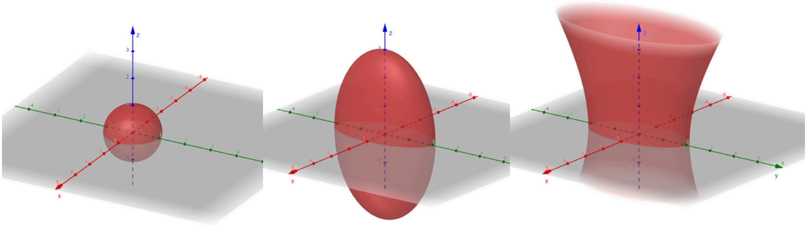
În mod similar, rotind pe traiectoria unei elipse vom obține ecuația

$$\frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = f^2(x) \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$$

Rotind pe traiectoria unei hiperbole avem

$$\frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = f^2(x) \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$$

Rotirea Cercului



Rotirea Elipsei

Funcția considerată este $f : [-b, b] \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.
Rotind pe traiectoria unui cerc vom obține

$$y^2 + z^2 = f^2(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + y^2 + z^2 = b^2$$

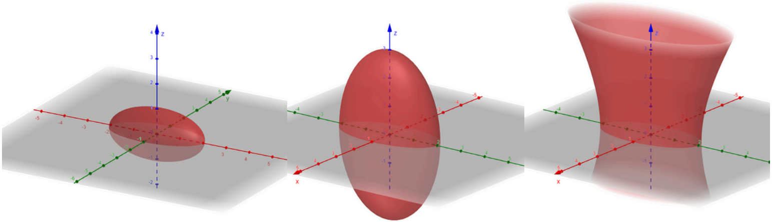
Pe traiectoria unei elipse vom avea

$$\frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = f^2(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = b^2$$

Pe o traiectorie hiperbolică vom avea

$$\frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = f^2(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = b^2$$

Rotirea Elipsei



Rotirea Parabolei

Funcția considerată este $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = 2\sqrt{ax}$. În jurul unui cerc vom obține suprafață de ecuație

$$4ax - y^2 - z^2 = 0$$

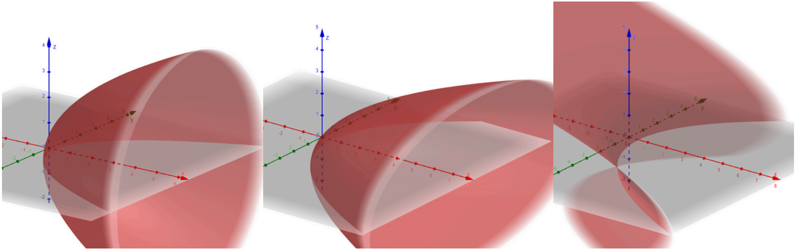
Rotind pe traiectorie eliptică vom obține suprafața de ecuație

$$4ax - \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 0$$

iar pe traiectorie hiperbolică vom obține suprafața dată de

$$4ax - \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 0$$

Rotirea Parabolei



Rotirea Hiperbolei

Funcția luată în considerare este $f : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \to \mathbf{R}$,
$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
În urma rotirii pe traiectorie circulară, suprafața obținută este de ecuație

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + y^2 + z^2 = -b^2$$

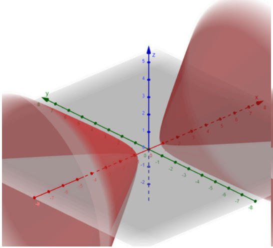
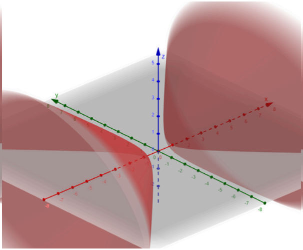
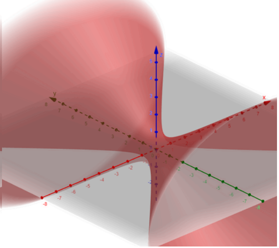
Prin rotirea pe traiectorie de elipsă vom obține suprafața de ecuație

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = -b^2$$

Suprafața obținută prin rotația în jurul unei hiperbole este dată de

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = -b^2$$

Rotirea Hiperbolei

Suprafețele obținute

Conica / Traiectoria de rotatie	Cerc	Elipsa	Parabola	Hiperbola
Cerc	Sfera	Elipsoid de rotatie	Paraboloid de rotatie	Hiperboloid de rotatie
Elipsa	Elipsoid	Elipsoid	Paraboloid eliptic	Hiperboloid
Hiperbola	Hiperboloid	Hiperboloid	Paraboloid hiperbolic	Hiperboloid