Metode de Diagonalizare și de Jordanizare a matricelor pătratice cu elemente complexe

Profesor coordonator,

Lect. dr. Iorgulescu Florin Gabriel

Student,

Gîrtan Florin-Alexandru

2024

I. **Matrice. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare**

II. **Forma canonică Jordan a unei matrice complexe**

III. **Funcții de matrice**

În matematică, o matrice este un tabel dreptunghiular de numere sau, mai general, de elemente ale unei structuri algebrice de tip inel. Dacă m = n, atunci matricea este pătrată.

Se numește matrice de dimensiune (m, n) cu elementele din mulțimea $\mathbb{K}$ o funcție A : {**1**, **2**, **…**, **m**} x {**1**, **2**, **…**, **n**} $\rightarrow$ $\mathbb{K}$.

I. **Având** (a_{ij}) = A(i, j), **matricea se notează prin**

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a11} & \boldsymbol{a12} & \dots & \boldsymbol{a1n} \\ \boldsymbol{a21} & \boldsymbol{a22} & \dots & \boldsymbol{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{am1} & \boldsymbol{am2} & \dots & \boldsymbol{amn} \end{bmatrix}$$ **sau** $A = [a_{ij}]$; $i = \overline{1,m}$ **și** $j = \overline{1,n}$.

O matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ **se numește:**

- **hermitiană, dacă** $A^* = A$
- **antihermitiană, dacă** $A^* = -A$
- **unitară, dacă** $A^* \cdot A = A \cdot A^* = I_n$
- **normală, dacă** $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

Se numesc <u>transformări elementare</u> într-o matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathrm{K})$ **următoarele transformări:**

- **adunarea unei linii la altă linie**
- **înmulțirea unei linii cu un număr (element din** K**) nenul**
- **schimbarea între ele a două linii**

Analog se definesc transformările elementare pe coloane.

I.

Se numesc matrice elementare matricele pătratice obținute din matricea unitate I_n, $n \in \mathbb{N}^*$ prin aplicarea unei transformări elementare.

Teoremă. Efectuarea unei transformări elementare pe liniile matricei $A \in M_n(K)$ revine la înmulțirea matricei A la stânga cu matricea elementară $E_l \in M_m(K)$ corespunzătoare transformării

I. (se obține $B = E_l \cdot A$).

Teoremă. Efectuarea unei transformări elementare pe coloanele matricei A revine la înmulțirea matricei A la dreapta cu matricea elementară $E_c \in M_n(K)$ corespunzătoare transformării.

Dacă A $\in \mathbf{M_n}(\mathbb{C})$ este o matrice pătratică atunci polinomul $f_A \in \mathbb{K}[x]$, $f(x)$ = det(A $- x \cdot I_n$), se numește <u>polinomul caracteristic</u> al matricei A.

Teoremă. Expresia canonică a polinomului caracteristic este
$f_A(x) = (-1)^n(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n\sigma_n)$
unde σ_k este suma minorilor diagonali de ordin k ai matricei A.

I.

Rădăcinile polinomului caracteristic se numesc <u>valori proprii</u> pentru matricea A (λ este valoare proprie dacă și numai dacă $f_A(\lambda) = 0$).
Mulțimea valorilor proprii formează <u>spectrul matricei</u> A.

Dacă λ este o valoare proprie pentru A, soluțiile nebanale ale sistemului $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = 0$ sau $A \cdot X = \lambda \cdot X$ cu $X \in \mathbf{M_{n,1}}(\mathbb{C})$ se numesc <u>vectori proprii</u> pentru A.

Calculul inversei unei matrice cu transformări elementare

Să se calculeze inversa celulei Jordan

$$J_a = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{C}^*$$

I.

Soluție. Se consideră matricea

$$A = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

asupra căreia se efectuează transformările elementare: împărțim fiecare linie cu a și o scădem din linia anterioară, începând cu linia n spre linia 1.

Apoi, se obține:

$$A \approx \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} \end{array}\right] \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-2} & a^{-3} & \dots & (-1)^{n-1}a^{-n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a^{-1} & -a^{-2} & \dots & (-1)^{n-2}a^{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-1} \end{array}\right]$$

I.

Deducem:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a^{-1}} & \boldsymbol{-a^{-2}} & \boldsymbol{a^{-3}} & & \boldsymbol{(-1)^{n-1}a^{-n}} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \boldsymbol{a^{-3}} \\ & & & \ddots & \boldsymbol{-a^{-2}} \\ \boldsymbol{0} & & & & \boldsymbol{a^{-1}} \end{bmatrix}$$

I. Matrice. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare

II. Forma canonică Jordan a unei matrice complexe

III. Funcții de matrice

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică cu elemente numere complexe.

II.

Teoremă (Jordan). Există o matrice nesingulară $P \in M_n(\mathbb{C})$ astfel ca matricea $P^{-1} \cdot A \cdot P = J_A$ să aibă forma

$$J_A = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_k} \end{bmatrix} \quad \text{(cvasidiagonală)}$$

în care blocurile diagonale sunt celule Jordan de forma:

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sunt valorile proprii ale matricei A.

II.

Determinarea coloanelor matricei P se face rezolvând sisteme de forma $A \cdot X = \lambda X$ cu λ valoarea proprie (coloanele astfel determinate sunt vectori proprii pentru matricea A) sau sisteme succesive de forma:

$$\begin{cases} AX = \lambda X \\ AX' = \lambda X' + X \\ AX'' = \lambda X'' + X' \\ \dots \end{cases} \qquad X \neq 0$$

unde vectorul X este vector propriu iar X', X'', … se numesc vectori principali.

Un alt mod de determinare a formei canonice Jordan a matricei A, fără a determina și matricea de pasaj este următorul:

Metoda factorilor invarianți

Fie $\boldsymbol{D_i}(\lambda)$ c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul i ce se pot forma cu elementele matricei caracteristice A – λI_n. Se formează factori invarianți

II.

$$\boldsymbol{E_i}(\lambda) = \frac{\boldsymbol{D_i}(\lambda)}{\boldsymbol{D_{i-1}}(\lambda)},\ i = \overline{1,n}, \qquad D_0(\lambda) = 1$$

Se consideră șirul factorilor invarianți $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \dots, \boldsymbol{E_n}$.

II.

Se caută puterea maximă la care intră $\lambda - \lambda_1$ în fiecare din factorii invarianți. Dacă $(\lambda - \lambda_1)^p$ este un astfel de binom, el se numește divizor elementar. Acestuia îi corespunde o celulă Jordan de ordinul p de forma:

$$J_P(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Se procedează în felul acesta cu toate valorile proprii. Se observă că unei valori proprii poate să-i corespundă mai multe celule Jordan. Scriind celulele Jordan pe <u>diagonala principală</u> se obține forma canonică Jordan.

Exemplu. **Să se determine forma canonică Jordan a matricei:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II.

Soluție. **a) Determinăm valorile proprii ale matricei** A **rezolvând ecuația caracteristică:**

$$\mathbf{det}(A - \lambda I_4) = 0$$

și obținem $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

b) Determinăm vectorii proprii rezolvând sistemul

$$(A - 1 \cdot I_4) \cdot X = 0$$

adică:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

II.

care are soluția generală $X = [\alpha, \alpha, \beta, \beta]^t = \alpha[1, 1,0,0]^t + \beta[0,0,1,1]^t$.

Din această mulțime (infinită) de vectori proprii în matricea de pasaj (care este nesingulară) putem reține doar doi (independenți), cu care mai trebuie construiți doi vectori principali.

Se observă că sistemul $(A - 1 \cdot I_4) \cdot X' = X$ **este compatibil dacă și numai dacă** $X = [a, a, b, b]^t$ **deci cu fiecare din vectorii** $\boldsymbol{X_1}=[1,1,0,0]^t$ **și** $\boldsymbol{X_3}=[0, 0, 1,1]^t$ **putem construi câte un vector principal** $\boldsymbol{X_2'}$ **și** $\boldsymbol{X_4'}$**.**

II.

Pentru X_2' **obținem sistemul:**

$$\begin{cases} -x_1' + x_2' - x_3' + x_4' = 1 \\ -x_1' + x_2' - x_3' + x_4' = 1 \\ -x_1' + x_2' = 0 \\ -x_1' + x_2' = 0 \end{cases}$$

pentru care putem alege o soluție $\boldsymbol{X_2'}=[0,0,0,1]^t$**.**

Pentru X_4' obținem sistemul:

$$\begin{cases} -x_1' + x_2' - x_3' + x_4' = 0 \\ -x_1' + x_2' - x_3' + x_4' = 0 \\ -x_1' + x_2' = 1 \\ -x_1' + x_2' = 1 \end{cases}$$

pentru care alegem soluția X_4'=$[0,1,1,0]^t$.

II.

Deci matricea de pasaj este:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Deci matricea de pasaj este:

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

având două celule Jordan de dimensiune 2.

II.

Metoda factorilor invarianți

Pentru a determina mai simplu polinoamele $D_i(\lambda)$ aducem matricea caracteristică $A - \lambda I_n$ la forma diagonală cu ajutorul transformărilor elementare, caz în care $D_i(\lambda)$ este c.m.m.d.c. numai al minorilor principali de ordinul i.

Avem:

$$A-\lambda I_4 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

II.

$$A-\lambda I_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & \lambda-1 \\ -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & \lambda^2-\lambda+1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & \lambda^2-\lambda+1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & \lambda^2-\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

II.

Deci $D_4 = (1-\lambda)^4$, $D_3 = (1-\lambda)^2$, $D_2 = D_1 = 1$.

Factorii invarianți: $E_4 = (1-\lambda)^2$, $E_3 = (1-\lambda)^2$, $E_2 = E_1 = 1$.

Divizorii elementari sunt $(1-\lambda)^2$ și $(1-\lambda)^2$.

II.

Fiecăruia îi corespunde o celulă Jordan de ordinul 2 de forma

$$J_2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma Jordan este $\left[\begin{array}{c|c} J_2(1) & 0 \\ \hline 0 & J_2(1) \end{array}\right]$

I. Matrice. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare

II. Forma canonică Jordan a unei matrice complexe

III. Funcții de matrice

III.

Rezultate teoretice.

a) Dacă J_λ este celulă Jordan de dimensiune n

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

și $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție, $D \subset \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci dacă există derivatele $f'(\lambda), \dots, f^{(n-1)}(\lambda)$ definim

$$f(J_\lambda) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}f''(\lambda) \\ & & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda) \\ 0 & & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

III.

Rezultate teoretice.

b) Dacă forma Jordan a matricei A este

$$J_A = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_p} \end{bmatrix}$$

unde J_1 sunt celule Jordan, atunci

$$f(J_A) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_p) \end{bmatrix}$$

c) Dacă $J_A = \mathbf{P}^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{P}$ atunci $f(A) = \mathbf{P} \cdot f(J_A) \cdot \mathbf{P}^{-1}$

Exemple propuse.

1) Să se determine A^n unde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

III. **Soluție.** **det**$(A - \lambda I_3)$**= 0** $\Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ **valorile proprii ale matricei** A.

Pentru $\lambda_1 = 0$ **sistemul** $A \cdot X_1 = 0$ **dă vectorul propriu** $X_1 = [0,1,-1]^t$, **iar pentru** $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ **sistemul** $(A - I) \cdot X = 0$ **dă un singur vector propriu independent** $X_2 = [1,1,1]^t$ **și construim vectorul principal** X_3' **ca soluție a sistemului** $(A - I)\, X_3' = X_2$, **obținem** $X_3 = [0,1,0]^t$.

Exemple propuse.

III.

Deci:

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad {J^n}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Și:

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{P} \cdot {J^n}_A \cdot \mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1-2n & n & n \\ -1-2n & n+1 & n+1 \\ 1-2n & n & n \end{bmatrix}$$

Exemple propuse.

2) Să se determine termenii generali ai șirurilor recurente:

$$\begin{cases} X_{n+1} = 4X_n + Y_n + Z_n \\ Y_{n+1} = -2X_n + Y_n - 2Z_n \\ Z_{n+1} = X_n + Y_n + 4Z_n \end{cases} \qquad X_0, Y_0, Z_0 \in \mathbb{R}.$$

III. **Soluție. Notând $\boldsymbol{U_n}$ = $[X_n, Y_n, Z_n]^{\boldsymbol{t}}$,** A = $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$**, sistemul se scrie $\boldsymbol{U_{n+1}}$=** A $\cdot$ $\boldsymbol{U_n}$**, deci $\boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{A^n} \cdot \boldsymbol{U_0}$.**

$$J_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad {J^n}_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{3}^{\boldsymbol{n-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n+3} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{-2n} & \boldsymbol{3-2n} & \boldsymbol{-2n} \\ \boldsymbol{n} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{3+n} \end{bmatrix}$$

Deci:

III.

$$\begin{cases} X_n = 3^{n-1}[(\mathrm{n}+3)X_0 + \mathrm{n}Y_0 + \mathrm{n}Z_0] \\ Y_n = 3^{n-1}[-2\mathrm{n}X_0 + (3-2\mathrm{n})Y_0 - 2nZ_0] \\ Z_n = 3^{n-1}[nX_0 + nY_0 - (n+3)Z_0] \end{cases}$$

Exemple propuse.

3) Să se determine ln A pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

III.

Soluție. $\ln A = \ln(I_3 + B) = \sum_{n\geq 1} \frac{-1^{(n+1)}}{n} \cdot B^n$.

Dar $B^3 = 0 \Rightarrow \ln A = B - \frac{1}{2} \cdot B^2$.

Observație. $\rho(B) = 0 < 1$.

Bibliografie:

Vasile Pop – Algebră Liniară și Geometrie Analitică
Nicolae Radu, Ion D. Ion – Algebră
C. Niță, C. Năstăsescu – Bazele algebrei

Vă mulțumesc pentru atenția acordată!