Funcții bijective ce duc drepte în drepte și cercuri în cercuri

Filip Cristian Dumitru

Universitatea Ovidius, Facultatea de Matematică și Informatică
Matematică Școlară Avansată

7 Decembrie 2024

Introducere

- O similaritate este o aplicație de forma $z \to az + b$ sau $z \to a\bar{z} + b$, unde $a, b \in \mathbb{C}$ cu $a \neq 0$
- O să notăm această aplicație cu f.
- Fiecare similaritate este o funcție bijectivă ce duce drepte în drepte și cercuri în cercuri.
- Cum f este bijectivă pe $\mathbb{C}$, atunci și f^{-1} există și este și ea bijectivă pe $\mathbb{C}$.
- În această prezentare, vom arăta și reciproca: Dacă o funcție este bijectivă și duce drepte în drepte și cercuri în cercuri, atunci funcția este o similaritate.

Demonstrație

Vom începe demonstrația cu o mică recapitulare despre noțiuni simple de geometrie:

Reamintim

Oricare 3 puncte în $\mathbb{C}$, fie sunt coliniare, fie sunt conciclice, dar nu amândouă în același timp.

- Știm că f este bijectivă și duce dreptele în drepte. Asta nu înseamnă încă că orice dreaptă este imaginea unei drepte. Să arătăm că acest lucru este adevărat.

Rezultate fundamentale

(1) Fie $L^{'}$ o dreaptă, fie $w_1, w_2, w_3 \in L^{'}$ și să notăm cu $z_j = f^{-1}(w_j)$. Dacă z_j sunt conciclice și cum f duce drepte în drepte și cercuri în cercuri, atunci $w_j \in C$, unde C este un cerc. Dar, w_j sunt coliniare, contradicție.

Deci, z_j sunt coliniare și atunci $\exists$ o dreaptă L astfel încât $z_j \in L$, $\forall j = \overline{1,3}$. De aici deducem că, $f(L) = L^{'}$. Analog și pentru cercuri.

Cum f este o funcție bijectivă, pentru orice 2 mulțimi A și B avem:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Rezultă deci, următoarele proprietăți:

- (i) L și L' sunt paralele dacsi numai dacă $f(L)$ și $f(L')$ sunt paralele.
- (ii) Dreapta L este în exteriorul cercului C dacă și numai dacă $f(L)$ este în exteriorul cercului $f(C)$.
- (iii) Dreapta L este tangentă la C dacă și numai dacă $f(L)$ este tangentă la $f(C)$.
- (iv) Dreapta L intersectează C în 2 puncte dacă și numai dacă $f(L)$ intersectează $f(C)$ în 2 puncte.

Interior în interior

(3) Fie cercul

$$C(a, r) = \{z||z - a| = r.\}$$

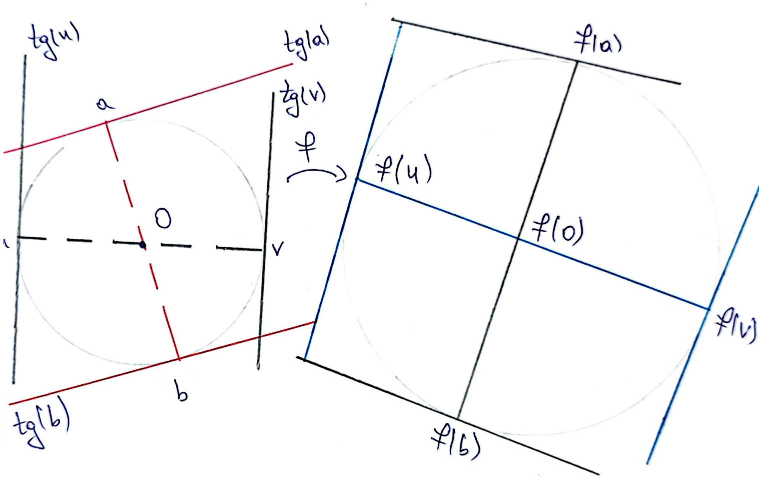
Atunci, avem că discul $D(a, r) \subset C(a, r)$ și fie $z \in D(a, r)$. Orice dreaptă ce trece prin z, intersectează cercul C în exact două puncte. Dacă $z \in Int(C)$, atunci orice dreptă ce trece prin $f(z)$ intersectează $f(C)$ în 2 puncte, deci

$$f(Int(C)) = Int(f(C)).$$

Centru în centru

(4) Fie u și v două puncte pe cerc. Ele sunt diametral opuse dacă și numai dacă tangentele prin u și v la cercul C sunt paralele. Altfel spus, f duce centrul cercului C în centrul cercului $f(C)$.

Centru în centru



Continuitate

(5) Pentru orice $z_0 \in \mathbb{C}$ și orice $\epsilon > 0$, fie $w_0 = f(z_0)$ și fie $C(w_0, \epsilon)$. Conform (1), există C un cerc ce este dus în cercul $C(w_0, \epsilon)$ și conform (4), cercul C are centrul z_0. Deci,

$$C = C(w_0, \delta_\epsilon).$$

Acum, (3) ne arată că f duce $D(z_0, \delta_\epsilon)$ în $D(w_0, \epsilon)$, ceea ce înseamnă că

$$|z - z_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon,$$

adică f este continuă în z_0. Cum $z_0 \in \mathbb{C}$ oarecare, avem că f continuă pe $\mathbb{C}$.

Definirea unei alte funcții

(6) Cum f este o funcție bijectivă, este deci și injectivă, adică $f(0) \neq f(1)$. Astfel, putem defini funcția h tot ca o similaritate astfel:

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$h(z) = \frac{z - f(0)}{f(1) - f(0)}.$$

Considerăm $h \circ f$ care este o funcție bijectivă cu $h(f(0)) = 0$ și $h(f(1)) = 1$. Și $h \circ f$ duce drepte în drepte și cercuri în cercuri, și cum (R) este o dreaptă(drepta reală), atunci

$$(h \circ f)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Mijlocul segmentului

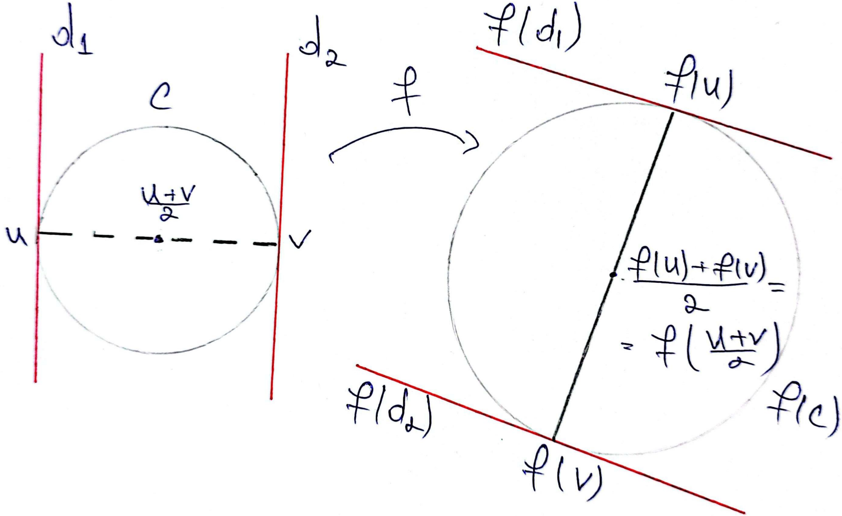
(7) Fie $u, v \in \mathbb{C}$ două puncte distincte. Să arătăm că

$$f(\frac{u+v}{2}) = \frac{f(u)+f(v)}{2}.$$

Fie C unicul cerc astfel încât u și v să fie diametrul său. Putem lua punctul M = mijlocul diametrului [uv]. Atunci $M = \frac{u+v}{2}$. Deci

$$f(M) = \frac{f(u)+f(v)}{2} \Rightarrow f(\frac{u+v}{2}) = \frac{f(u)+f(v)}{2}.$$

Mijlocul segmentului



Funcția f in $\mathbb{R}$

(8) Cum $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$, conform (7) avem $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$, prin inducție avem că, $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Conform (7), avem că și că $f(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Prin inducție, deducem că

$$f(\frac{m}{2^n}) = \frac{m}{2^n}, \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Mulțimea $A = \{\frac{m}{2^n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}] \subset \mathbb{R}$ densă. Astfel că, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}, \exists\ x_k \longrightarrow x_0$, cu $(x_k) \subseteq A$. Din continuitatea lui f, avem $f(x_k) \longrightarrow f(x_0)$. Deci,

$$f(x_0) = x_0.$$

Așadar,

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

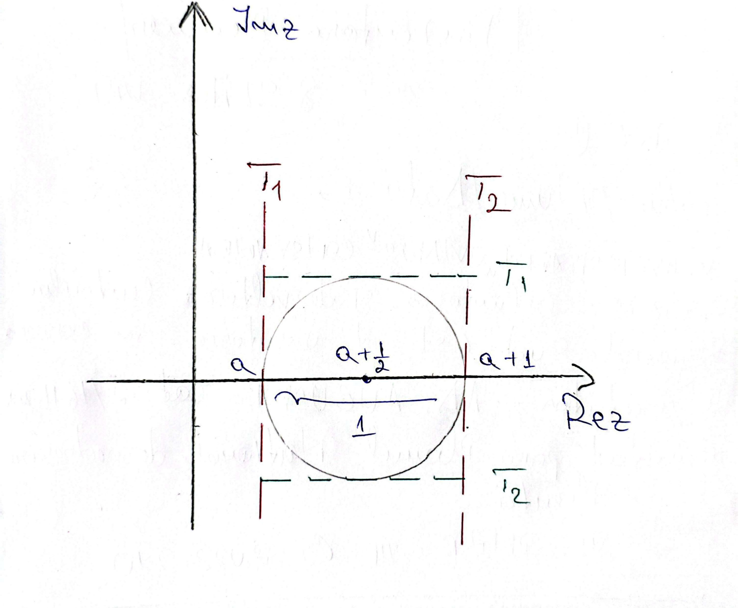
f este izometrie

(9) Acum, să considerăm $a \in \mathbb{R}$ și C cercul cu diametrul [a , a+1]. Tangenta ce trece prin a la cercul C este dusă în tangenta prin $f(a)$ la cercul $f(C)$. Conform (8), avem că $f(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$ și $f(C) = C$. f duce orice dreaptă verticală în ea însăși.

Considerăm C un cerc în $\mathbb{C}$ și T_1, T_2 două tangente verticale la C. Așadar, $f(C)$ și C au aceeași rază.

Cum $f(T_j) = T_j$, avem că T_1, T_2 sunt tangente și la $f(C)$. Fie u și v două numere complexe și C cercul de centru u cu v punct pe cerc. Cum $f(C)$ cerc de centru $f(u)$ ce trece prin $f(v)$ și cum C și $f(C)$ au aceeași rază, deducem că f este o izometrie, adică

$$|f(u) - f(v)| = |u - v|, \forall u, v \in \mathbb{C}.$$



Scanat cu CamScanner

(10) Să considerăm acum un număr complex $z = x + iy$, și fie $f(z) = a + bi$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$

$$|f(z) - t|^2 = |z - t|^2.$$

Adică,

$$|f(z)|^2 - 2Ref(z)t + t^2 = |z|^2 - 2Re(tz) + t^2.$$

Și de aici,

$$(|f(z)|^2 - |z|^2) + 2t(Re(z - f(z)) = 0.$$

Avem că $|f(z)| = z$ sau $Re(f(z)) = Re(z)$.

Deci, f(z) poate fi z sau $\overline{z}$.

În final, vom arăta că fie $f(z) = z$, $\forall z \in C$, fie $f(z) = \overline{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Conform (10) avem, $f(i) = i$ sau $f(i) = -i$.

- Să considerăm cazul în care $f(i) = i$. Pentru orice z deasupra axei reale, avem

$$|f(z) - i| = |f(z) - f(i)| = |z - i| < |\overline{z} - i|$$

  deci, $f(z) = z$. Analog $f(z) = z$, pentru z situat sub axa reală.
- Pentru $f(i) = \overline{i} = -i$ se arată în acelaşi mod.
- Astfel,

$$f(z) = z$$

  sau

$$f(z) = \overline{z}.$$

Bibliografie

1. G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, Inequalities (Second Edition), Cambridge Univ. Press, Cambridge (1952).
2. R.P. Boas, A Primer of Real Functions, Carus Math. Monographs 13, Math. assoc. of America (1960).
3. Articol scris de A.F. Beardon, The Mathematical Gazette, Cambridge Univ.(2023).