Diferite caracterizări ale punctului lui Mathot

Gabriela Constantinescu și Cătălin Zîrnă
profesori CNMB Constanța

Lema 1. Fie *ABCD* un patrulater convex și *N*, *T*, *R*, *S* mijloacele laturilor *AB*, *BC*, *CD* și respectiv *DA*. Atunci *NTRS* este paralelogram.

Definiția 1. Într-un patrulater convex, segmentele care unesc mijloacele a două laturi opuse se numesc ***bimediane***.

Definiția 2. Dacă *ABCD* este un patrulater convex, punctul *G* cu proprietatea că
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ se numește ***centrul de greutate*** al patrulaterului.

Observația 1. Folosind relația $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}+\overrightarrow{G'D}$, se arată că dacă acest punct există, atunci este unic.

Lema 2. Centrul de greutate al unui patrulater convex este mijlocul segmentului determinat de mijloacele diagonalelor.

Lema 3. Bimedianele unui patrulater convex se intersectează în centrul de greutate al patrulaterului.

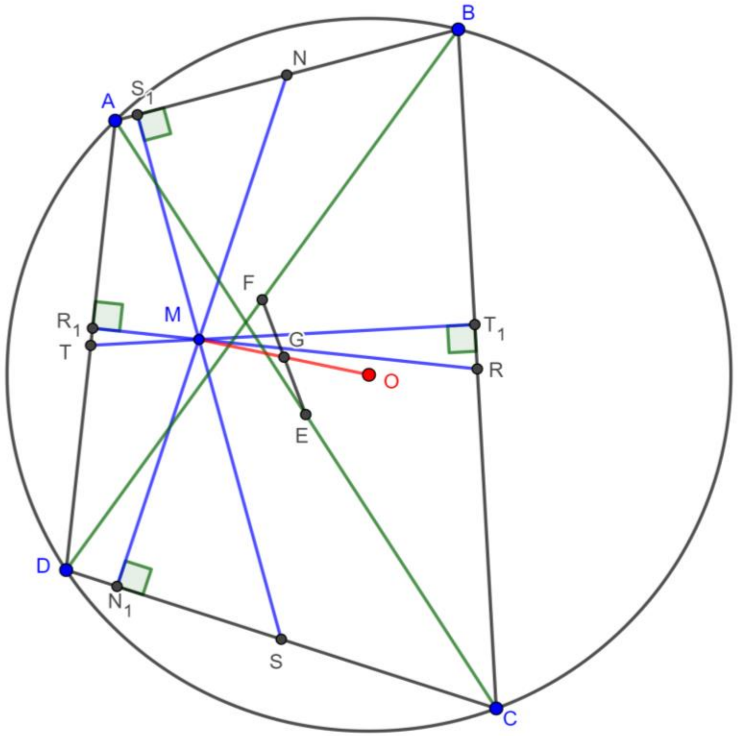
Demonstrație

Fie *ABCD* patrulaterul convex și *N*, *T*, *R*, *S* mijloacele laturilor *AB*, *BC*, *CD* și respectiv *DA*.

$\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OS}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}=\dfrac{4\overrightarrow{OG}}{2}=2\overrightarrow{OG}$, deci *M* este mijlocul bimedianei *NS*. Analog pentru bimediana *RT*. ■

Definiția 3. Într-un patrulater convex, dreptele care trec prin mijloacele laturilor și sunt perpendiculare pe laturile opuse se numesc ***maltitudini***.

Teorema 1. Într-un patrulater inscriptibil, maltitudinile sunt concurente. Punctul de concurență se numește ***punctul lui Mathot*** sau ***anticentrul*** patrulaterului.



Fie *ABCD* patrulaterul inscriptibil cu *N*, *T*, *R* și *S* mijloacele laturilor și maltitudinile $NN_1,\ TT_1,\ RR_1,\ SS_1$. Notăm cu *E* și *F* mijloacele diagonalelor și *G* mijlocul segmentului *EF*. Notăm $\{M\} = NN_1 \cap SS_1$. Dacă *O* este centrul cercului circumscris patrulaterului, avem că $ON \perp AB$ și cum $SM \perp AB$ rezultă $ON \| SM$. Analog $OS \| MN$ deci *OSMN* este paralelogram așadar mijlocul segmentului *OM* este mijlocul bimedianei *NS*, adică centrul de greutate al patrulaterului *ABCD*. Așadar $M = sim_G O$.

În același mod, toate cele patru maltitudini trec prin *M*. ■

Deci punctul Mathot verifică $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OG}$ și din $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$ deducem

Teorema 2. Punctul Mathot M al patrulaterului inscriptibil $ABCD$ verifică relația

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}\,.$$

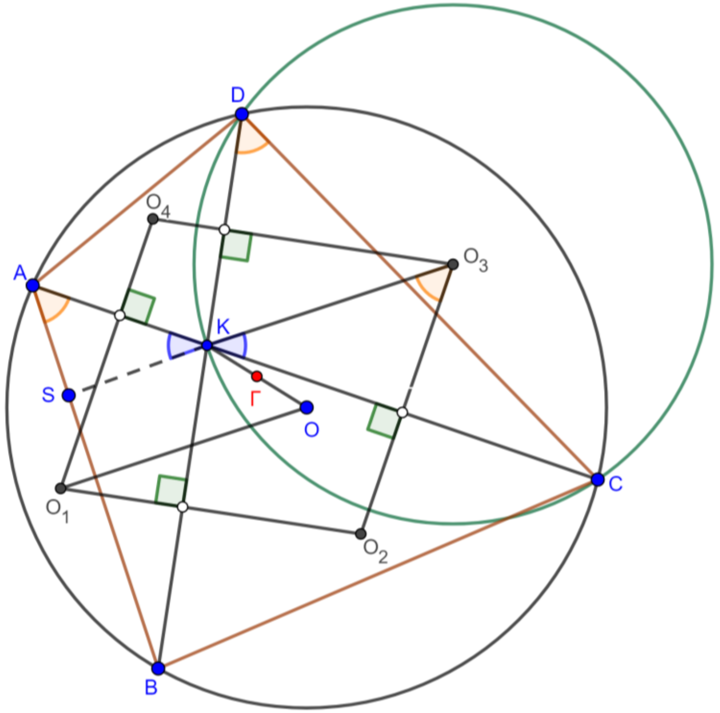
Proprietatea 1. Punctul Mathot al unui patrulater inscriptibil și ortodiagonal este punctul de intersecție al diagonalelor.

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, O este centrul cercului circumscris, $\{K\} = AC \cap BD$, E este mijlocul diagonalei AC și F al diagonalei BC. Din $OEKF$ dreptunghi, avem $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OK}$ și deducem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OK}$, deci K este punctul Mathot. ■

Lema 4. Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil, *O* este centrul cercului circumscris, $\{K\} = AC \cap BD$ și O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor *AKB*, *BKC*, *CKD* și respectiv *DKA*.

a) Să se arate că $O_1O_2O_3O_4$ este un paralelogram.

b) Dacă Γ este centrul paralelogramului $O_1O_2O_3O_4$, să se arate că Γ este mijlocul segmentului *OK*.



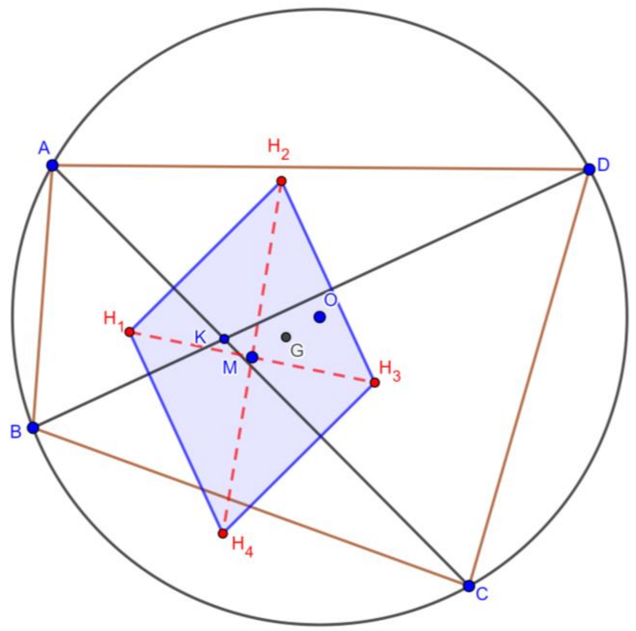
a) O_1O_2 este mediatoarea segmentului *BK* iar O_3O_4 este mediatoarea segmentului *DK*, deci $O_1O_2 \| O_3O_4$. Analog $O_1O_4 \| O_2O_3$, așadar $O_1O_2O_3O_4$ este un paralelogram.

b) Evident că O_1O este mediatoarea segmentului *AB*, deci $O_1O \perp AB$. Fie $\{S\} = O_3K \cap AB$.

Din $\sphericalangle KO_3O_2 = \sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle AKS = \sphericalangle CKO_3$ deducem că $O_3K \perp AB$. Așadar $OO_1 \| O_3K$.

În același mod arătăm că $OO_3 \| O_1K$, adică OO_1KO_3 este paralelogram. În concluzie, Γ este mijlocul segmentului OK. ∎

Proprietatea 2. Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil, *O* este centrul cercului circumscris, $\{K\} = AC \cap BD$ și H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor *AKB*, *BKC*, *CKD* și respectiv *DKA*. Să se arate că $H_1H_2H_3H_4$ este un paralelogram cu centrul în punctul Mathot al patrulaterului *ABCD*.



Folosind relația lui Sylvester, avem: $\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1K}=\overrightarrow{O_1H_1}$, $\overrightarrow{O_2B}+\overrightarrow{O_2C}+\overrightarrow{O_2K}=\overrightarrow{O_2H_2}$, $\overrightarrow{O_3C}+\overrightarrow{O_3D}+\overrightarrow{O_3K}=\overrightarrow{O_3H_3}$, $\overrightarrow{O_4D}+\overrightarrow{O_4A}+\overrightarrow{O_4K}=\overrightarrow{O_4H_4}$. De aici

$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{H_1O_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2H_2}=\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{BO_1}+\overrightarrow{KO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2B}+\overrightarrow{O_2C}+\overrightarrow{O_2K}=2\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{AC}$ și

$\overrightarrow{H_4H_3}=\overrightarrow{H_4O_4}+\overrightarrow{O_4O_3}+\overrightarrow{O_3H_3}=\overrightarrow{DO_4}+\overrightarrow{AO_4}+\overrightarrow{KO_4}+\overrightarrow{O_4O_3}+\overrightarrow{O_3C}+\overrightarrow{O_3D}+\overrightarrow{O_3K}=2\overrightarrow{O_3O_4}+\overrightarrow{AC}$.

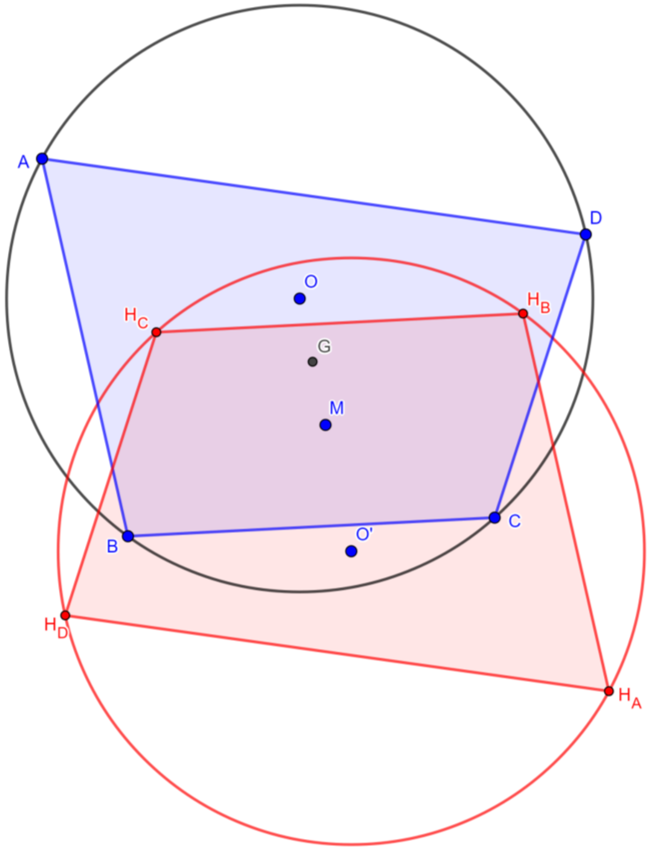
Din Lema 1 știm că $O_1O_2O_3O_4$ este un paralelogram, deci $\overrightarrow{O_2O_1}=\overrightarrow{O_3O_4}$. Așadar avem $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{H_4H_3}$, adică $H_1H_2H_3H_4$ este un paralelogram.

Folosind $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$ (caracterizarea punctului lui Mathot) și $\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_3}=\overrightarrow{OK}$ (din Lema 1), avem:

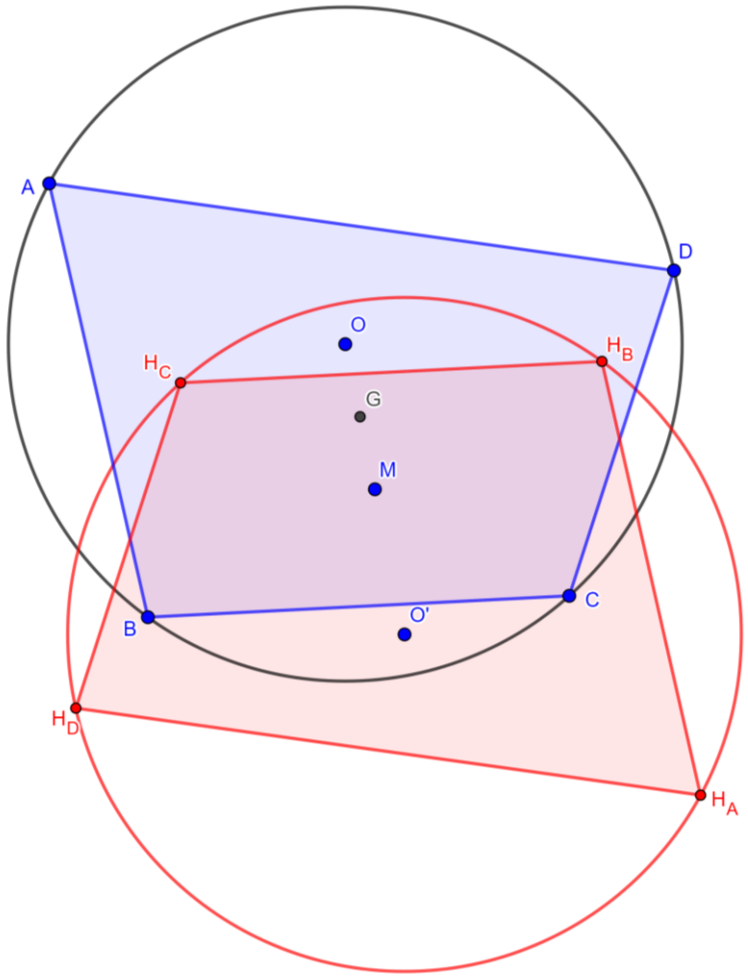
$$\frac{\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_3}}{2}=\frac{\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1K}+\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{O_3C}+\overrightarrow{O_3D}+\overrightarrow{O_3K}}{2}=\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{O_3O}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM},$$

adică centrul paralelogramului $H_1H_2H_3H_4$ este punctul lui Mathot al patrulaterului *ABCD*. ■

Proprietatea 3. Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil și H_A, H_B, H_C, H_D ortocentrele triunghiurilor *BCD*, *ACD*, *ABD* și respectiv *ABC*. Să se arate că dreptele AH_A, BH_B, CH_C, DH_D sunt concurente în punctul lui Mathot al patrulaterului *ABCD* și că patrulaterul $H_AH_BH_CH_D$ este congruent cu *ABCD*.



Folosind relația lui Sylvester, avem: $\overrightarrow{OH_A}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OM}$. De aici, *M* este mijlocul segmentului AH_A. Analog, *M* este și mijlocul segmentelor BH_B, CH_C, DH_D.
$\overrightarrow{H_AH_B}=\overrightarrow{OH_B}-\overrightarrow{OH_A}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$ și analoagele. ■



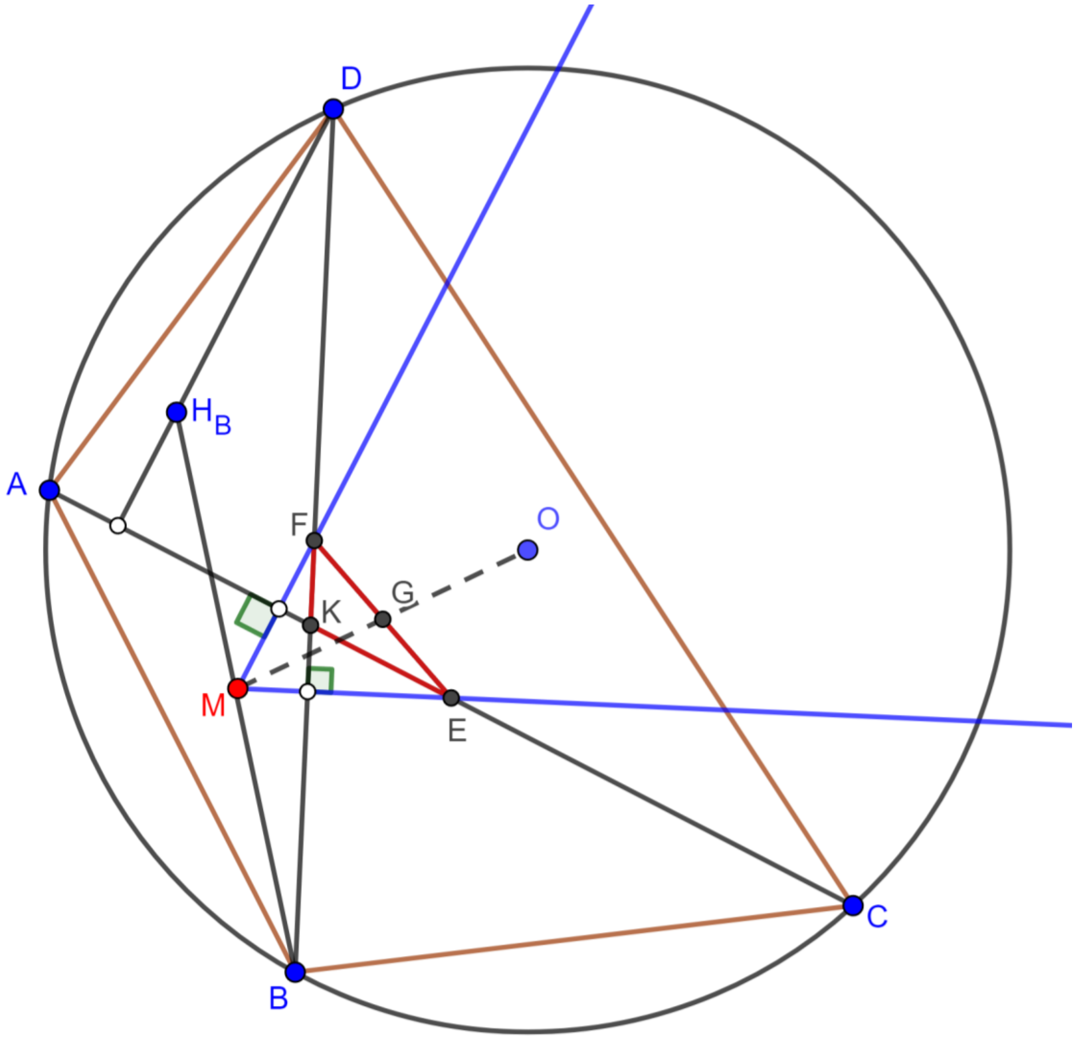
Observația 2. Punctul Mathot este mijlocul segmentelor AH_A, BH_B, CH_C, DH_D.

Observația 3. Patrulaterul $H_AH_BH_CH_D$ este simetricul patrulaterului *ABCD* față de punctul Mathot al său.

Observația 4. Punctul Mathot al patrulaterului $H_AH_BH_CH_D$ coincide cu cel al patrulaterului *ABCD*.

Dacă notăm cu E și F mijloacele diagonalelor AC respectiv BD, folosind observația 2 deducem că MF este linie mijlocie în triunghiul BH_BD, deci $MF \parallel DH_B$. Cum $DH_B \perp AC$ avem $MF \perp AC$ și analog $ME \perp BD$. De aici rezultă

Proprietatea 4. Punctul Mathot al unui patrulater inscriptibil este ortocentrul triunghiului format de mijloacele diagonalelor si punctul de intersecție al acestora.

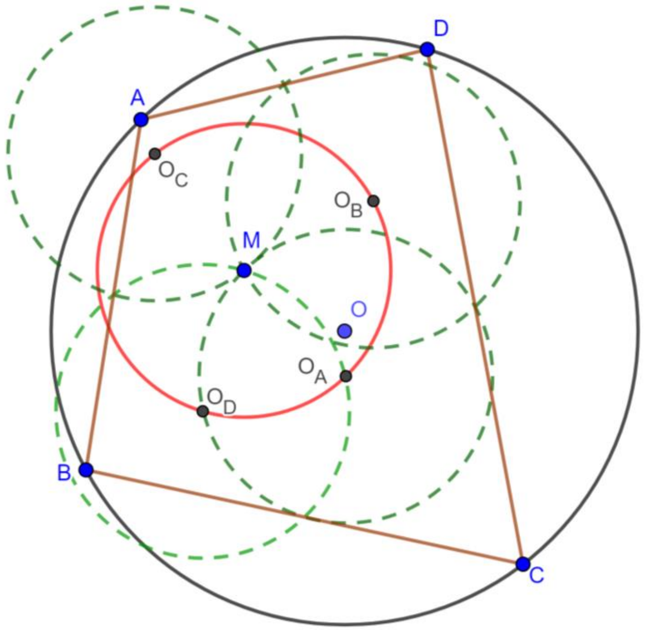


Proprietatea 5. Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil, *M* punctul Mathot și O_A, O_B, O_C, O_D centrele cercurilor Euler asociate triunghiurilor *BCD*, *ACD*, *ABD* și respectiv *ABC*. Să se arate că:

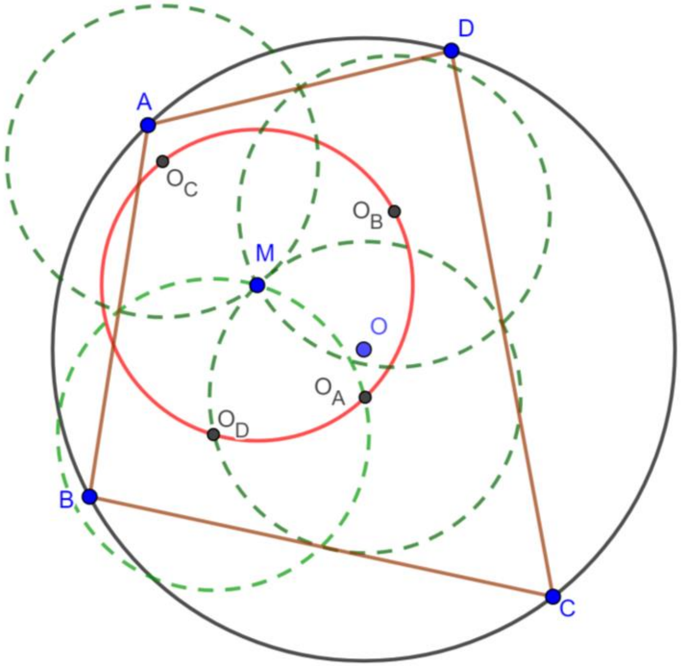
a) O_A, O_B, O_C, O_D se află pe un cerc cu centrul în *M*;

b) cele patru cercuri Euler se intersectează în *M*;

c) cele patru cercuri Euler și cercul format de O_A, O_B, O_C, O_D sunt congruente.



$\overrightarrow{MO_A} = \overrightarrow{OO_A} - \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2} - \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{AO}}{2}$ și de aici $MO_A = \dfrac{r}{2}$, unde *r* este raza cercului circumscris patrulaterului. Analog pentru celelalte puncte și cum raza cercurilor Euler este jumătate din raza cercului circumscris triunghiului, avem cele trei concluzii. ■



Folosind $\overrightarrow{MO_A} = \dfrac{\overrightarrow{AO}}{2}$ și $\overrightarrow{MO_B} = \dfrac{\overrightarrow{BO}}{2}$ avem $\overrightarrow{O_A O_B} = \overrightarrow{MO_B} - \overrightarrow{MO_A} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{2}$ și analoagele, ceea ce ne duce către

Proprietatea 6. Patrulaterele $O_A O_B O_C O_D$ și *ABCD* sunt asemenea.

De asemenea, $\overrightarrow{MO_A} + \overrightarrow{MO_B} + \overrightarrow{MO_C} + \overrightarrow{MO_D} = -\dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} = -\dfrac{4\overrightarrow{OG}}{2} = -2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MG}$ și de aici

Proprietatea 7. Punctul Mathot pentru $O_A O_B O_C O_D$ este centrul de greutate al patrulaterului *ABCD*.

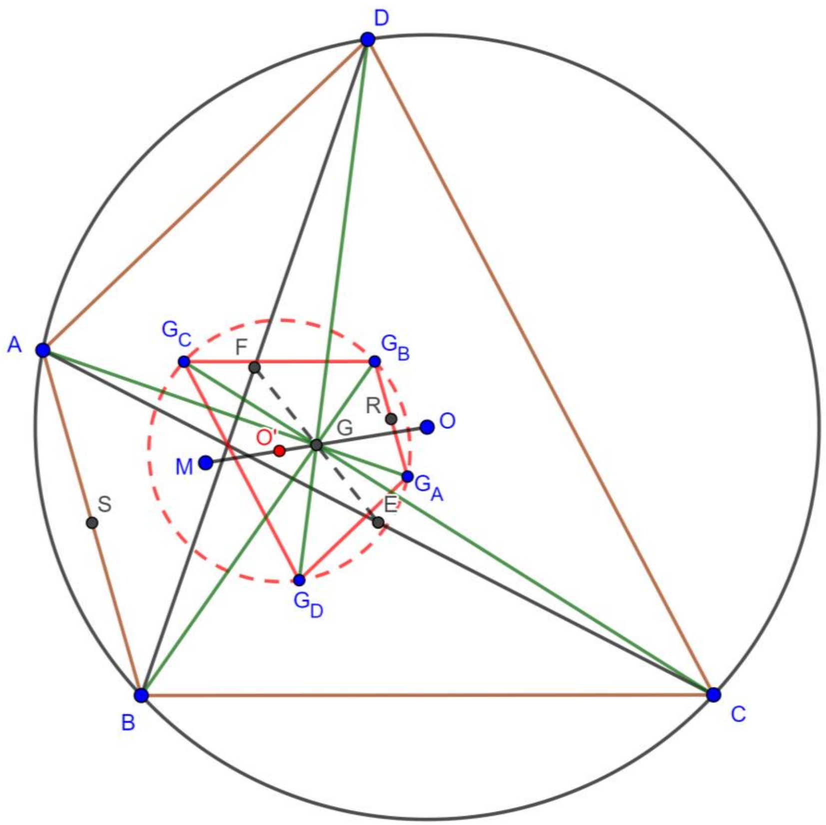
Proprietatea 8. Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil și G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale triunghiurilor *BCD*, *ACD*, *ABD* și respectiv *ABC*.

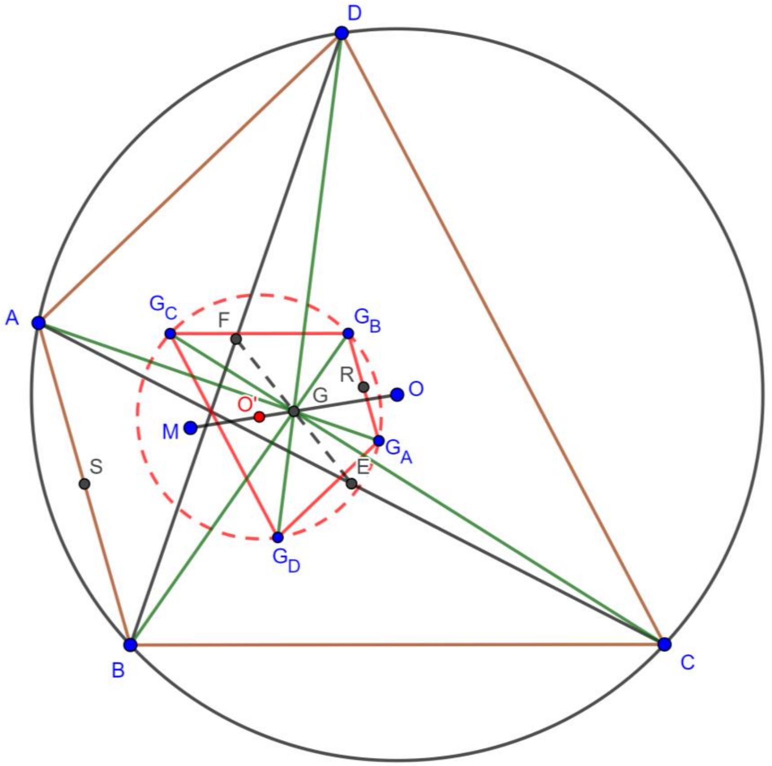
a) Să se arate că patrulaterele $G_AG_BG_CG_D$ și *ABCD* sunt asemenea.

b) Să se arate că dreptele AG_A, BG_B, CG_C, DG_D sunt concurente în centrul de greutate *G* al patrulaterului *ABCD*.

c) Să se arate că *G* este centrul de greutate al patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$.

d) Să se arate că centrul cercului circumscris patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$, notat O', este centrul de greutate al triunghiului *MEF*, unde *M* este punctul Mathot al patrulaterului *ABCD* iar *E* și *F* sunt mijloacele diagonalelor *AC* respectiv *BD*.



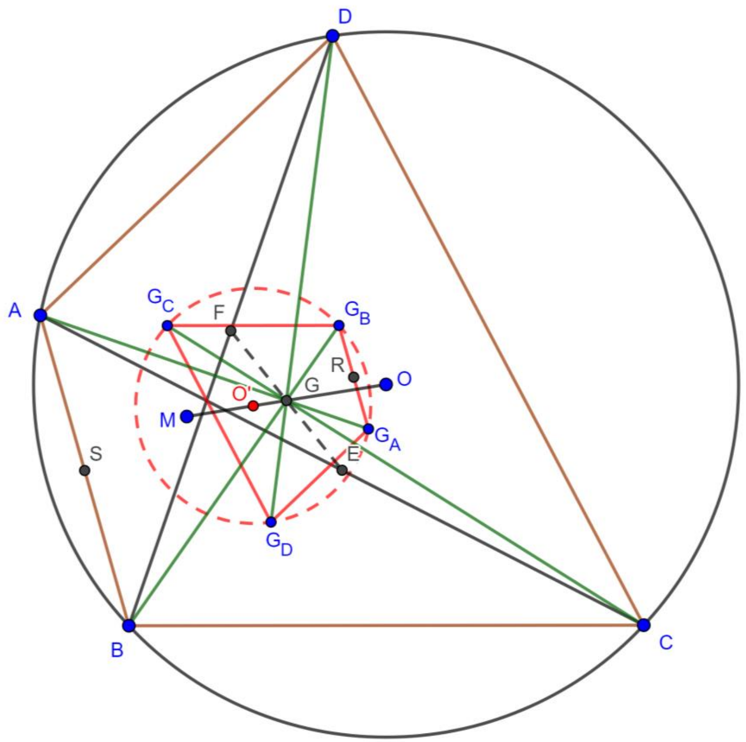


a) $\overrightarrow{G_AG_B} = \overrightarrow{r_{G_B}} - \overrightarrow{r_{G_A}} = \dfrac{\vec{r_A}+\vec{r_C}+\vec{r_D}}{3} - \dfrac{\vec{r_B}+\vec{r_C}+\vec{r_D}}{3} = \dfrac{\vec{r_A}-\vec{r_B}}{3} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ și analoagele, de aici rezultând asemănarea cerută.

b) $\overrightarrow{GG_A} = \dfrac{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}{3} = -\dfrac{\overrightarrow{GA}}{3}$ deci A, G, G_A sunt coliniare. Analog B, G, G_B coliniare, C, G, G_C coliniare, D, G, G_D coliniare.

c) $\overrightarrow{GG_A} + \overrightarrow{GG_B} + \overrightarrow{GG_C} + \overrightarrow{GG_D} = \dfrac{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}{3} + \dfrac{\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}}{3} + \dfrac{\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}}{3} +$

$+\dfrac{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}{3} = \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \vec{0}$, deci G este centrul centrul de greutate al patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$.

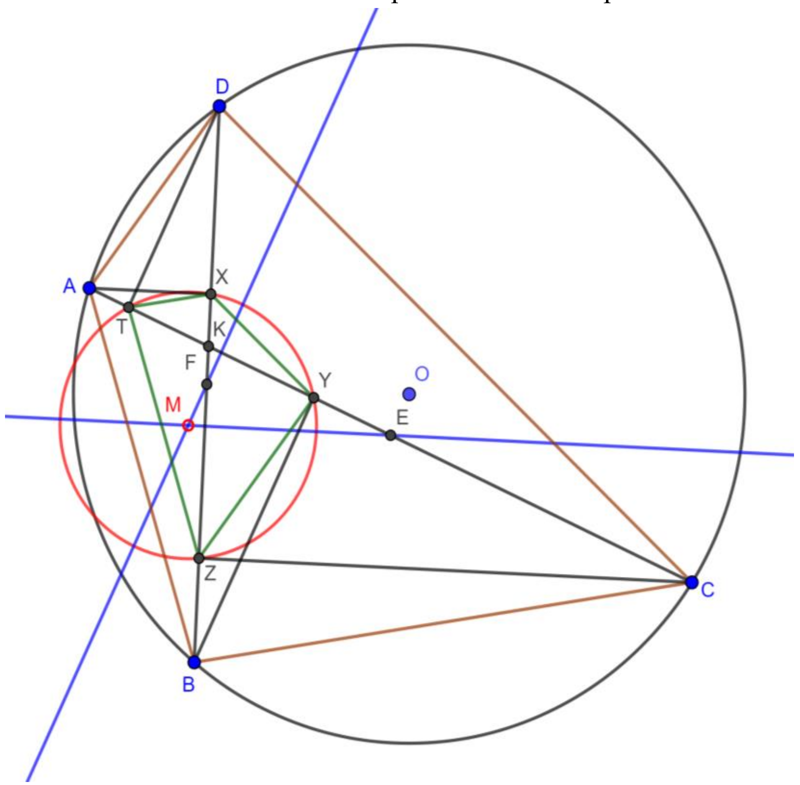


d) $\overrightarrow{O'R}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OO'}=\dfrac{\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}}{2}-\overrightarrow{OO'}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{6}-\overrightarrow{OO'}=$

$=\dfrac{4\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{6}-\overrightarrow{OO'}=\dfrac{8\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{6}-\overrightarrow{OO'}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OG}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OO'}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OS}$ dacă alegem O' astfel încât $\overrightarrow{OO'}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OG}$. În acest caz avem că $O'R \parallel OS$ și cum $OS \perp AB$, $AB \parallel G_AG_B$, deducem că $O'R \perp G_AG_B$, deci mediatoarea segmentului G_AG_B trece prin O'. Analog pentru celelalte mediatoare, deci O' este centrul cercului circumscris patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$.

Cum G este mijlocul segmentului EF și M simetricul lui O față de G, iar $\overrightarrow{OO'}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OG}$, avem că O' este la 1/3 de G și 2/3 de M, adică este centrul de greutate al triunghiului MEF. ■

Proprietatea 12. Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil. Să se arate că picioarele perpendicularelor din vârfuri pe diagonalele acestuia formează un patrulater inscriptibil înscris într-un cerc cu centrul în punctul Mathot al patrulaterului *ABCD*.



Fie X, Y, Z, T proiecțiile și M punctul Mathot al patrulaterului *ABCD*.
ATXD și *BCYZ* sunt inscriptibile, rezultă $\sphericalangle TXZ = \sphericalangle DAC = \sphericalangle CBD = \sphericalangle TYZ$, deci *XYZT* este inscriptibil.
$[AC]$ se proiectează în $[XZ]$ pe *BD* deci mijlocul *E* al lui *AC* se proiectează în mijlocul lui *XZ*. Arătăm că *EM* este perpendiculară pe *BD* deci *EM* este mediatoarea lui $[XZ]$.
$\overrightarrow{ME} = \dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}{2} = \dfrac{2\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2} = \dfrac{2\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}}{2} = -\overrightarrow{OF}$ și cum $OF \perp AB$ avem că $EM \perp DB$. Analog, *MF* este mediatoarea lui $[TY]$, deci *M* este centrul cercului circumscris patrulaterului *XYZT*. ■

Vă mulțumim pentru atenție!