ȘIRURILE LUI ARHIMEDE: PROPRIETĂȚI ȘI ANALOGII

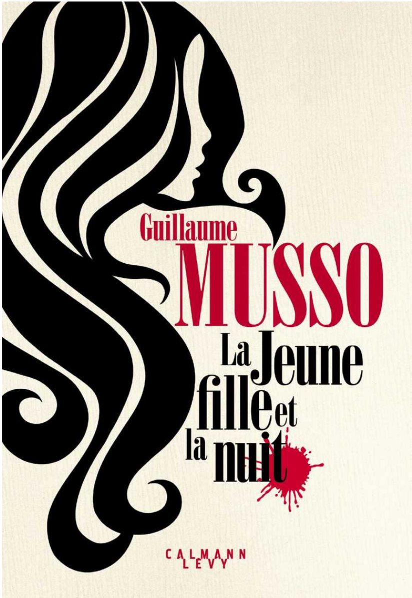
Coordonatori: Gabriela Constantinescu, Cătălin Zîrnă

Ștefan Patrichi <stefan.patrichi.07@cnmbct.ro>
Răzvan-Anton Mureanu <razvan.mureanu@cnmbct.ro>

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân" Constanța

Sesiunea de Comunicări Matematice
7 decembrie 2024

Introducere



d'élèves des classes prépas qui visaient des concours très sélectifs, ainsi que de trois ou quatre professeurs résidents qui, à cause de la tempête de neige, avaient loupé leur avion ou leur train du matin.

Depuis une demi-heure, assis à mon bureau, j'avais le regard éteint, désespérément fixé sur l'énoncé d'un problème d'algèbre.

Exercice n° 1

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ puis, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est égale à

$$\frac{b \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)\right)}{\operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)}$$

J'allais sur mes dix-neuf ans. J'étais en classe préparatoire scientifique. Depuis la rentrée de septembre, je vivais un enfer, avec l'impression d'être constamment sous l'eau, ne dormant souvent que quatre heures par nuit. Le rythme de la prépa m'éreintait et me démoralisait. Dans ma classe, sur une quarantaine d'élèves, quinze avaient déjà abandonné. J'essayais de m'accrocher, mais c'était peine perdue. Je détestais les maths et la physique et. à cause de mes choix d'orientation. ie me retrouvais à devoir consacrer à

Două medii înrudite

Două medii înrudite

Șiruile din carte sunt definite astfel: Fie a și b două numere reale astfel încât $0 < a < b$. Considerăm $u_0 = a$ și $v_0 = b$, iar apoi, pentru orice număr natural n:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ și } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Notăm $\cos\alpha = \frac{a}{b} \in (0,1)$ și obținem că:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{b \sin(\arccos(\frac{a}{b}))}{\arccos(\frac{a}{b})},$$

folosind inducție și formulele pentru unghiul dublu.

Două medii înrudite

Propoziție

Dacă a_n este perimetrul unui $p \cdot 2^n$-gon regulat circumscris, iar b_n perimetrul unui $p \cdot 2^n$-gon regulat înscris într-un cerc de rază r ($p \in \mathbb{N}^*$ oarecare), atunci:

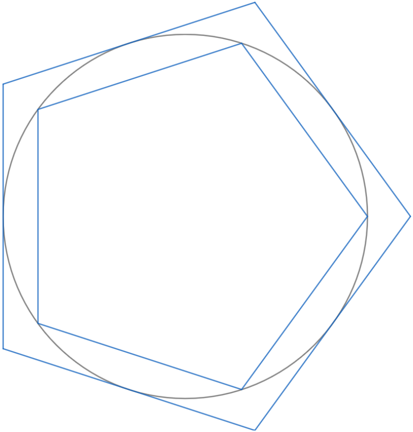
$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \text{ și } b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

Mai mult, șirurile $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ coincid cu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectiv $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de mai sus.

Două medii înrudite

Propoziție

Dacă c_n este aria unui $p \cdot 2^n$-gon regulat circumscris, iar d_n aria unui $p \cdot 2^n$-gon regulat înscris într-un cerc de rază $\sqrt{r}$ ($p \in \mathbb{N}^*$ oarecare), atunci $c_n = a_n$ și $d_n = b_{n-1}$, cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cele definite mai sus.



Construcția lui Arhimede pentru $p = 5, n = 0$ (pentagon)

Două medii înrudite

Corolar

Șirurile $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (d_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfac relația de recurență:

$$u'_{n+1} = \frac{u'_n + v'_{n+1}}{2} \text{ și } v'_{n+1} = \sqrt{u'_n v'_n}.$$

Propoziție

Șirurile $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt adiacente și limita lor comună este egală cu

$$\frac{b' \sin\left(2\arccos\left(\sqrt{\frac{a'}{b'}}\right)\right)}{2\arccos\left(\sqrt{\frac{a'}{b'}}\right)},$$

unde $0 < u'_0 = a' < b' = v'_0$.

Două medii înrudite

Notăm în continuare cu $\mathrm{APM}(a, b)$—de la ***A**rchimedes' **P**erimeter **M**ean*— limita comună a șirurilor $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și cu $\mathrm{ASM}(a, b)$—de la ***A**rchimedes' **S**urface Area **M**ean*— limita comună a șirurilor $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Extensii ale APM și ASM

Extensii ale APM și ASM

Pentru $0 < b < a$, putem proceda similar, folosind funcții hiperbolice în locul celor trigonometrice.

$$\mathrm{APM}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos\left(\frac{a}{b}\right)}, & a < b \\ a, & a = b \\ \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\operatorname{arcch}\left(\frac{a}{b}\right)}, & a > b \end{cases}$$

$$\mathrm{ASM}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{ab - a^2}}{\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}, & a < b \\ a, & a = b \\ \dfrac{\sqrt{a^2 - ab}}{\operatorname{arcch}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}, & a > b \end{cases}$$

Proprietăți ale APM și ASM

Proprietăți ale APM și ASM

Definiție

O funcție $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ se numește:

(a) *omogenă*, dacă
$$f(\lambda a, \lambda b) = \lambda f(a, b)$$
pentru $a, b, \lambda > 0$.

(b) *simetrică*, dacă
$$f(a, b) = f(b, a)$$
pentru $a, b > 0$.

(c) *strictă*, dacă
$$f(a, b) = a \text{ sau } f(a, b) = b$$
dacă și numai dacă $a = b$.

Propoziție

Funcțiile APM și ASM:

(a) sunt omogene.

(b) nu sunt simetrice; $\mathrm{APM}(a,b) > \mathrm{APM}(b,a)$, $\mathrm{ASM}(a,b) < \mathrm{ASM}(b,a)$ când $0 < a < b$.

(c) sunt stricte.

Proprietăți ale APM și ASM

În continuare, studiem comportamentul asimptotic al acestor șiruri, în special ordinul și rata de convergență.

Propoziție

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1} - \mathrm{APM}(u_0, v_0)}{v_n - \mathrm{APM}(u_0, v_0)} = \frac{1}{4}$$

și analog pentru ASM.

Proprietăți ale APM și ASM

Observație

Acest rezultat se poate generaliza. Borwein & Borwein au demonstrat că orice iterație de medii de tip Arhimede (recurențe de tipul $a_{n+1} = f(a_n, b_n)$, $b_{n+1} = g(a_{n+1}, b_n)$, unde f și g sunt funcții continue și simetrice) are contracția egală cu $\mu = 1/4$.

Observație

Numărul de zecimale exacte ale șirurilor față de limita lor crește cu aproximativ $-\lg \mu = \lg 4 \approx 0,6$ zecimale.

Arhimede, la un pas de Gauss

Arhimede, la un pas de Gauss

Modificăm ușor recurența, pentru a crea simetrie.

Propoziție

Fie șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_0 = a > 0$, $y_0 = b > 0$, $a \neq b$ iar pentru orice număr natural n,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ și } y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}.$$

Atunci, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt adiacente.

Observație

Limita comună a acestor două șiruri este cunoscută drept *media aritmetico-geometrică* (AGM(a, b)). Aceasta a fost studiată de Gauss, două milenii mai târziu față de Arhimede. Forma închisă a AGM:

$$\frac{1}{\mathrm{AGM}(a,b)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}}.$$

Propoziție

Funcția AGM:

(a) este omogenă.

(b) este simetrică.

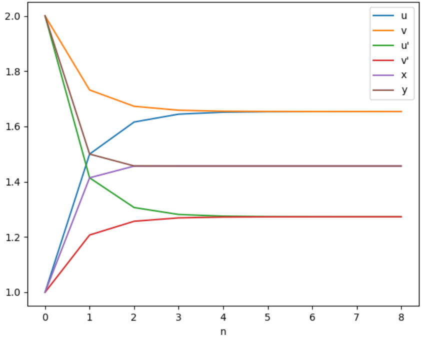
(c) este strictă.

Propoziție

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{(x_n - y_n)^2} = \frac{1}{8\,\mathrm{AGM}(a, b)}.$$

Observație

Șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converg pătratic. Numărul de zecimale exacte ale x_n, y_n față AGM(a, b) se dublează la fiecare iterație; aceste șiruri converg mult mai repede!



Iterații ale APM, ASM și AGM pentru $a = 1$ și $b = 2$

Alte medii similare

Alte medii similare

Propoziție

Iterația simetrică medie armonică – medie aritmetică converge la media geometrică a valorilor inițiale.

Și acest rezultat poate fi generalizat.

Alte medii similare

Definiție

Pentru p număr real nenul, se numește *medie Hölder* pentru două variabile o funcție $\mathrm{H}_p : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$, definită prin:

$$\mathrm{H}_p(a, b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pentru $p = 0$, $\mathrm{H}_0 \triangleq \sqrt{ab}$.

Propoziție

Funcțiile H_p:

(a) sunt omogene.

(b) sunt simetrice.

(c) sunt stricte.

Alte medii similare

Propoziție

Iterația simetrică $H_{-p} - H_p$ converge la H_0.

Propoziție

Iterația asimetrică (de tip Arhimede) $H_p - H_p$ cu valorile inițiale a și b converge la $\left(\frac{a^p+2b^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$ pentru $p \neq 0$ și la $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$ pentru $p = 0$.

Pentru alte iterații, cum ar $H_1 - H_2$, nu se cunosc forme închise ale limitelor.

Inegalități între medii

Lemă

Șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt strict pozitive. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, iar șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător pentru $x_0 \neq y_0$. De asemenea, ele sunt constante pentru $x_0 = y_0$.

Propoziție

Pentru $0 < a \leq b$, avem:

$$a \leq \mathrm{ASM}(a,b) \leq \sqrt{ab} \leq \mathrm{AGM}(a,b) \leq \frac{a+b}{2} \leq \mathrm{APM}(a,b) \leq b$$

Desigur, egalitatea se obține peste tot dacă și numai dacă $a = b$.

Inegalități între medii

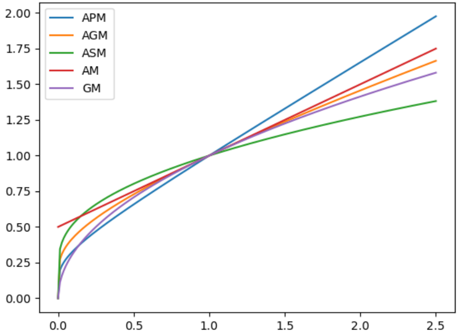
Observație

Remarcăm că monotonia acestor șiruri este independentă de valorile inițiale. Dacă $x_0 > y_0$, șirurile „se redresează” după o iterație, astfel că $x_n \leq y_n$ pentru $n \geq 1$.

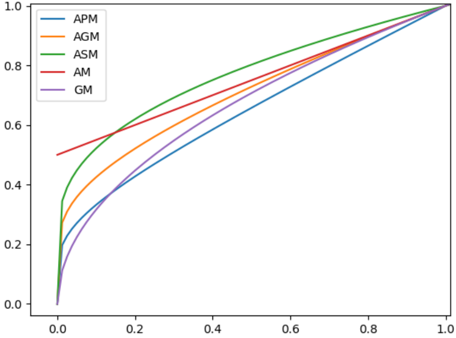
Observație

Dacă $0 < b \leq a$, intrăm în puțină dificultate. $\mathrm{ASM}(a, b) \geq \frac{a+b}{2}$ și $\mathrm{APM}(a, b) \leq \sqrt{ab}$ nu sunt totdeauna adevărate! (de exemplu, $a = 8$ și $b = 1$; vezi, de asemenea, figurile următoare).

Inegalități între medii



Graficele mediilor pentru $\{(1, x) \mid 0 < x < 2,5\}$



Graficele mediilor pentru $\{(1, x) \mid 0 < x \leq 1\}$

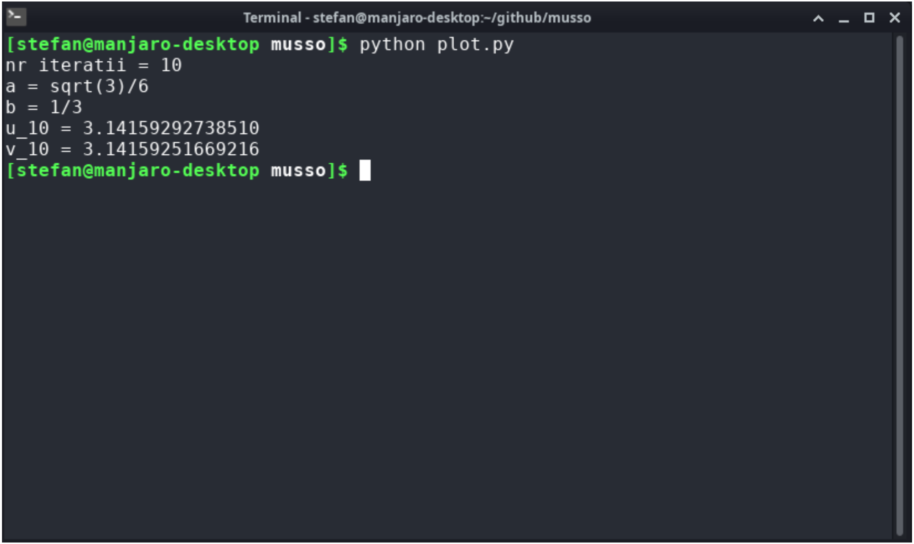
Aproximarea lui π

Aproximarea lui π

Arhimede a plecat de la $\text{APM}(\sqrt{3}/6, 1/3) = 1/\pi$ (2 zecimale exacte după 5 iterații). Astăzi, putem obține 6 zecimale exacte după 10 iterații (într-adevăr, $10 \lg 4 \approx 6$).

Identități similare: $\text{APM}(1, \sqrt{2}) = 4/\pi$, $\text{ASM}(1, 2) = 4/\pi$.

Aproximarea lui π



Concluzii

Concluzii

Șirurile și iterațiile de medii nu reprezintă o zonă nouă a matematicii. Totuși, ele deschid porți către aproximarea numerelor iraționale, integrale eliptice și poate funcții total diferite de cele cunoscute astăzi (de ex. iterația $H_1 - H_2$).

Invocarea matematicii în roman nu pare să aibă vreo legătură cu firul narativ, însă o potențială prezență neîntâmplătoare a exercițiului ar contribui la realizarea unei paralele cu parcursul acțiunii și al personajelor.