Sesiunea de comunicări matematice: Aplicații ale metricii Schwarzschild în astronomie

Comisarschi Maria-Alexandra

Universitatea Ovidius, Constanța

7 decembrie 2024

Cuprins

Introducere: Descoperind Universul

- 1915 - fizicianul Albert Einstein formulează **Teoria Generală a Relativității**;
- 1916 - fizicianul Karl Schwarzschild publică soluția exactă a ecuațiilor de câmp ale lui Einstein;

Deducerea ecuațiilor de câmp ale lui Einstein

↓

Identificarea metricii Schwarzschild

↓

Calculul traiectoriei planetare și a precesiei periheliului planetei Mercur

Deducerea ecuațiilor de câmp ale lui Einstein

- Identitatea lui Bianchi: $R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0$

Deducerea ecuațiilor de câmp ale lui Einstein

- Identitatea lui Bianchi: $R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0$
- Tensorul Riemann: $R^s_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^s_{jm}\Gamma^m_{ki} - \Gamma^s_{km}\Gamma^m_{ji}$

Deducerea ecuațiilor de câmp ale lui Einstein

- Identitatea lui Bianchi: $R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0$
- Tensorul Riemann: $R^s_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^s_{jm}\Gamma^m_{ki} - \Gamma^s_{km}\Gamma^m_{ji}$
- Tensorul Ricci (contracție a tensorului Riemann):

$$R_{ij} = R^s_{isj} = \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{sk}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^j_{si}$$

Deducerea ecuațiilor de câmp ale lui Einstein

- Identitatea lui Bianchi: $R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0$
- Tensorul Riemann: $R^s_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^s_{jm}\Gamma^m_{ki} - \Gamma^s_{km}\Gamma^m_{ji}$
- Tensorul Ricci (contracție a tensorului Riemann):

$$R_{ij} = R^s_{isj} = \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{sk}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^j_{si}$$

- Scalarul de curbură: $R = g^{ij} R_{ij}$

Deducerea ecuațiilor de câmp ale lui Einstein

- Identitatea lui Bianchi: $R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0$
- Tensorul Riemann: $R^s_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^s_{jm}\Gamma^m_{ki} - \Gamma^s_{km}\Gamma^m_{ji}$
- Tensorul Ricci (contracție a tensorului Riemann):

$$R_{ij} = R^s_{isj} = \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{sk}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^j_{si}$$

- Scalarul de curbură: $R = g^{ij} R_{ij}$
- **Ecuațiile de câmp ale lui Einstein:**

$$\boxed{R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = k T_{ij}.}$$

Obținerea soluției Schwarzschild

- Soluția are simetrie sferică (câmpul gravitațional depinde doar de distanța radială de la sursa gravitațională, nu și de unghiurile polare sau azimutale)

Obținerea soluției Schwarzschild

- Soluția are simetrie sferică (câmpul gravitațional depinde doar de distanța radială de la sursa gravitațională, nu și de unghiurile polare sau azimutale)

$$(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3) \Longrightarrow (x^0 = ct, r, \varphi, \theta), \text{ unde:}$$
$$x^1 = rsin\varphi cos\theta, \quad x^2 = rsin\varphi sin\theta, \quad x^3 = rcos\varphi$$

- Soluția are simetrie sferică (câmpul gravitațional depinde doar de distanța radială de la sursa gravitațională, nu și de unghiurile polare sau azimutale)

$$(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3) \Longrightarrow (x^0 = ct, r, \varphi, \theta), \text{ unde:}$$
$$x^1 = rsin\varphi cos\theta, \quad x^2 = rsin\varphi sin\theta, \quad x^3 = rcos\varphi$$

- **Metrica Minkowski în coordonate sferice spațiale:**

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\varphi^2 + r^2sin^2\varphi d\theta^2$$

Obținerea soluției Schwarzschild

- Soluția are simetrie sferică (câmpul gravitațional depinde doar de distanța radială de la sursa gravitațională, nu și de unghiurile polare sau azimutale)

$$(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3) \Longrightarrow (x^0 = ct, r, \varphi, \theta), \text{ unde:}$$
$$x^1 = rsin\varphi cos\theta, \quad x^2 = rsin\varphi sin\theta, \quad x^3 = rcos\varphi$$

- **Metrica Minkowski în coordonate sferice spațiale:**

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\varphi^2 + r^2sin^2\varphi d\theta^2$$

- $ds^2 = -A(r)c^2dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\varphi^2 + r^2sin^2\varphi d\theta^2$, unde termenii A(r) și B(r) satisfac condițiile de câmp ale lui Einstein.

- Simbolul Christoffel de speța a doua:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

Metrica Schwarzschild este:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 d\varphi^2 + r^2 sin^2 \varphi d\theta^2.$$

Calcularea traiectoriei unei planete în metrica Schwarzschild

$$\ddot{\vec{X}}(t) = -\frac{GM}{r^3(t)} \cdot \vec{X}(t)$$

$$\downarrow$$

$$(x(t), y(t), 0) \longrightarrow (r(t) cos\theta(t), r(t) sin\theta(t), 0)$$

$$\downarrow$$

J- magnitudinea momentului unghiular al unei plante

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{J^2}$$

Calcularea traiectoriei unei planete în metrica Schwarzschild

- Mișcare plană: $z = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$(simetrie sferică și simplificare matematică);
- $ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2 r}}dr^2 + r^2 d\theta^2$
- Ecuațiile geodezicelor: $\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \cdot \dot{x}^j \cdot \dot{x}^k = 0$, unde $i = \overline{0,3}$
- **Ecuația care descrie mișcarea unei planete în jurul unei stele în metrica Schwarzschild:**

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{J^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

Precesia periheliului planetei Mercur

- $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{J^2}$
- $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{J^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$
- **Precesia periheliului:** $P_d = \frac{6\pi G^2 M^2}{c^2 J^2} \cdot N$
- **Precesia periheliului planetei Mercur: 43 de secunde de arc/ secol.**

- Callahan, J. J.,
  The Geometry of Spacetime: An Introduction to Special and General Relativity,
  Undergraduate texts in Mathematics, Springer
- Boskoff, W.-G. and Capozziello, S.,
  A Mathematical Journey to Relativity
  UNITEXT for Physics, Springer
- Chow, T. L.,
  Gravity, Black Holes and the Very Early Universe,
  2008, Springer Sience+Business Media, LLC.