Ce mai face Pisica lui Schrödinger?

(experiment mental)

CE AVEM NEVOIE

- 1935 (Schrödinger)
- cutie cu pereți opaci
- capacul cutiei
- DISPOZITIV CUANTIC
  - particula radioactivă
  - contor Geiger - sunet
  - mecanism
  - ciocan; borcan cu otravă

particula radioactivă are două posibile stări

- nedezintegrată, $|n\rangle$; $P \to 1/2$
- dezintegrată, $|d\rangle$; $P \to 1/2$

matematician

$$\boxed{\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2/\mathbb{C}}$$

baza standard este formată din

$$\boxed{\vec{e}_1 = (1, 0) \qquad \vec{e}_2 = (0, 1)}$$

$$\boxed{\forall \vec{u} \in \mathbb{C}^2/\mathbb{C}, \quad \vec{u} = u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2}, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \bar{u}_1 \cdot v_1 + \bar{u}_2 \cdot v_2}$$

– produsul scalar complex al vectorilor $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^2/\mathbb{C}$

(notații)

Fizician

- $\vec{u} = (u_1, u_2)$ $\rightsquigarrow$ $|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ {ket u}
- $e_1 = (1,0)$; $e_2 = (0,1)$ $\rightsquigarrow$ $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  ↳ elemente ale bazei standard ↳ stări pure
- $\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2$ $\rightsquigarrow$ $|u\rangle = u_1|0\rangle + u_2|1\rangle$
- pentru $z \in \mathbb{C}$, $\bar{z}$ conjugatul → z^* conjugatul
- $\langle u| = (u_1^* \ u_2^*)$ {bra u}

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \bar{u}_1 \cdot v_1 + \bar{u}_2 \cdot v_2$ → $\boxed{\langle u|v\rangle = u_1^* v_1 + u_2^* v_2}$

„BRAKET" P. DIRAC

natural : $\langle u|v\rangle = (u_1^* u_2^*)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Obs: $|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = E_0 |0\rangle\langle 0| + E_1 |1\rangle\langle 1|$$

SUPERPOZIȚIA

matematician:

$\vec{v} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2$ cu

$|v_1|^2 + |v_2|^2 = 1$,

matematicianul deduce

$|v_1| < 1$; $|v_2| < 1$

căci $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$.

În mecanica cuantică fizicianul

$|v\rangle = v_1 \cdot |0\rangle + v_2 |1\rangle$

starea v" ; "funcția de stare v" este " descrisă de "stările" pure $|0\rangle$ și $|1\rangle$

v_1, v_2 s.n. amplitudini de probabilitate

$|v_1|^2$; $|v_2|^2$ sunt probabilitățile de realizare a stărilor pure $|0\rangle$; $|1\rangle$.

Exemplul 1

monedă

BAN / STEMĂ

aruncă:

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S\rangle$$

- PÂNĂ CADE MONEDA VA FI ÎN SUPERPOZIȚIA BAN / STEMĂ
- ACEASTA ESTE STAREA EI
- CADE. SUPERPOZIȚIA COLAPSEAZĂ LA STAREA BAN SAU LA STAREA STEMĂ

stări pure

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \xrightarrow{\text{colaps}} \begin{array}{l} |0\rangle \text{ cu prob. } 1 \\ |1\rangle \text{ cu prob } 1. \end{array}$$

Exemplul 2

PARTICULA RADIOACTIVĂ $|PR\rangle$

STAREA PURĂ : NEDEZINTEGRATĂ $|N\rangle$ ✓

DEZINTEGRATĂ $|D\rangle$ ✓

$$|PR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|N\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|D\rangle \quad (*)$$

deci, în cadrul unui experiment în care fac observații din când în când asupra particulei, până când fac observația „particula radioactivă" este în „superpoziția cuantică" nedezintegrat/dezintegrat (*)

„Când „observ", „superpoziția colapsează" numai în una din cele două „stări pure" posibile !

$$|PR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \xrightarrow{\text{COLAPS}} \begin{cases} |0\rangle \text{ cu } P_c(|0\rangle) = 1 \\ |1\rangle \text{ cu } P_c(|1\rangle) = 1 \end{cases}$$

Stare pisică

$$|P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|M\rangle$$

superpoziția VIE/MOARTĂ

SUPERPOZIȚIA CUANTICĂ

NEDEZINTEGRAT

DEZINTEGRAT

$$|PR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|N\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|D\rangle$$

RIDIC CAPAC (COLAPS) : $|V\rangle$ ---→
$|M\rangle$ ---

REALITATEA OBSERVATORULUI :

PÂNĂ DESCHIDE CAPACUL : PISICA ESTE ÎN SUPERPOZIȚIA VIE/MOARTĂ

DUPĂ CE DESCHIDE CAPACUL : SUPERPOZIȚIA COLAPSEAZĂ → VIE (REICA) ex.
→ MOARTĂ

PRIETENUL LUI WIGNER (1961)

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ u_2 v_1 \\ u_2 v_2 \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |M\rangle$$

COLAPS $\rightsquigarrow$ $|V\rangle$, $|M\rangle$

$$|P\rangle_W = \frac{1}{\sqrt{2}} |V\rangle \otimes |V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |M\rangle \otimes |M\rangle$$

REALITĂȚI DIFERITE

EXISTĂ UN DECALAJ ÎNTRE COLAPS PENTRU PRIETEN ȘI SUPERPOZIȚIE PENTRU WIGNER !!

(1948) Claude Shannon ENTROPIA INFORMAȚIEI

(desemnează surpriza asociată unui set de date X)

$X = \{x \mid x$ - evenimente$\}$ $p(x)$ - probabilitatea asociată ev. $x \in X$

$$\boxed{H(X) = -\sum_{x \in X} p(x) \log_2 p(x)} \geq 0$$

$\log_2$ $\{$ biți

$$|P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|v\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|m\rangle \rightsquigarrow \text{colaps în } |v\rangle \text{ sau } |m\rangle \Longrightarrow$$

$$X_p = \{|v\rangle, |m\rangle\} \; ; \; p(|v\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \, , \; p(|m\rangle) = \dots = \frac{1}{2}$$

$$H(X_p) = -p(|v\rangle) \underbrace{\log_2 p(|v\rangle)}_{-1} - p(|m\rangle) \underbrace{\log_2 p(|m\rangle)}_{-1} = 1$$

(superpoziția înseamnă surpriza maximă, nu știu ce o să se întâmple)

în colapsul $|v\rangle$ cu probabilitate 1,

$$H(X_p) = -p(|v\rangle) \log_2 p(|v\rangle) = -1 \cdot \log_2 1 = 0$$ (nu mai există surpriză)

Descrierea adevarată a „sistemului cuantic" $|P\rangle = |\Psi(t)\rangle$.

$$|\Psi(t)\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t}} |0\rangle + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t}} |1\rangle$$

→ starea pisicii exprimată în funcție de timp - t.

E_0 - energia stării „vie"; E_1 - energia stării „moarta".

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ constanta lui „Planck redusă"; $E = h\nu$ → energia emisă absorbită a cuante

- Spațiul Hilbert al stărilor este $\mathbb{C}^2$
- energia „sistemului" exprimată prin operatorul Hamiltonian

$$\hat{H} = E_0 |0\rangle\langle 0| + E_1 |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

- evoluția stării pisicii

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \\ e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} \end{pmatrix} \dashrightarrow$$

ec. Schrödinger

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} \cdot |\Psi(t)\rangle}$$

Observația $\longmapsto$ conduce la „colaps" în una din stările pure

operatorul „observabilă" $\hat{O}(t)$

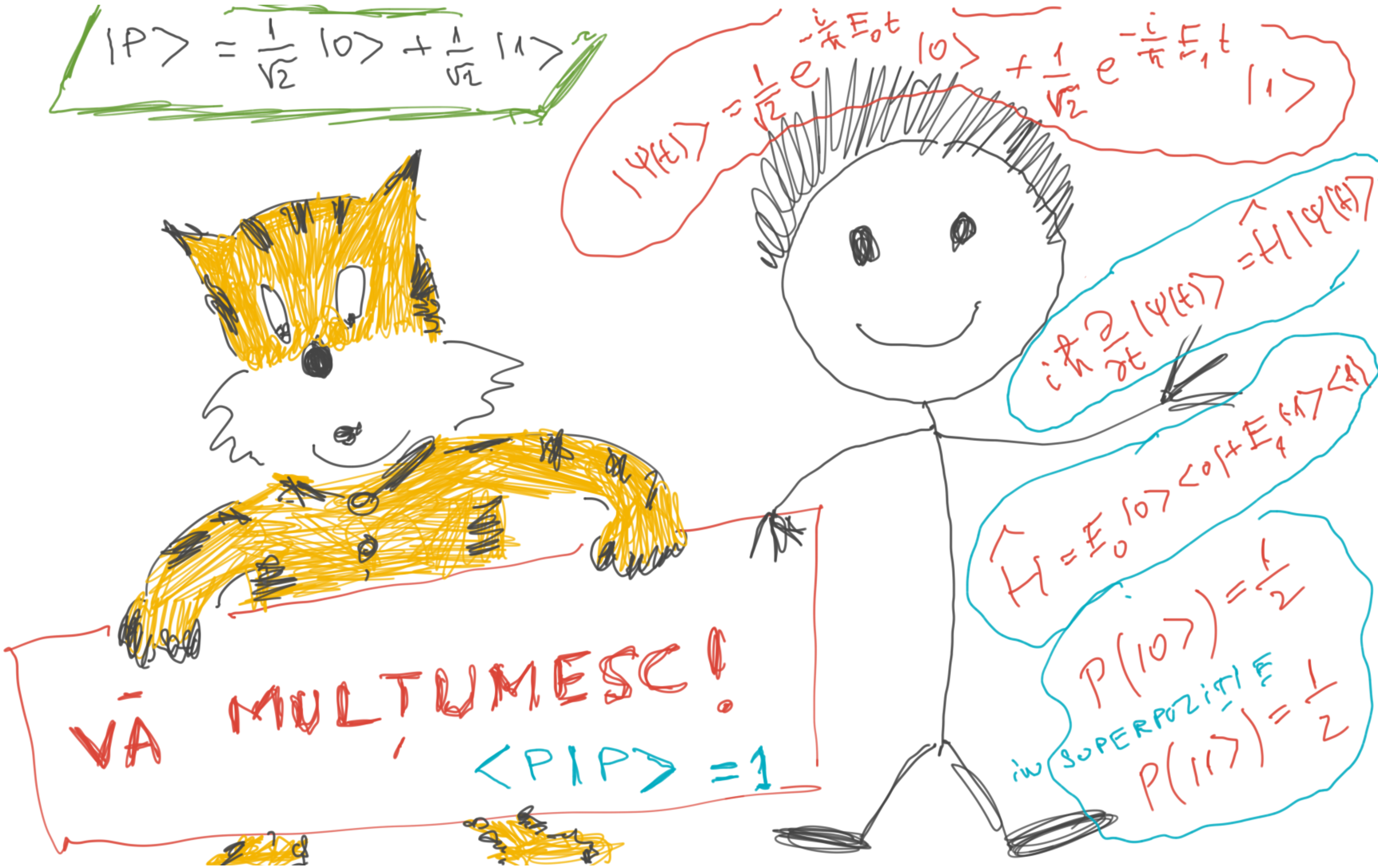
$$\boxed{\hat{O}(t)\,|v\rangle = \lambda^{\in\mathbb{R}}\cdot|v\rangle}$$

colapsează în starea $|v\rangle$ dacă posedă λ, $|v\rangle$ este valoare proprie / vector propriu

$\hat{O}(t)$ - se descrie printr-un operator Hermitian, (transpusa conjugatei este matricea)

$$\hat{O}^{\dagger}(t) = \hat{O}(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ etc.}$$


$|P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle$
$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$
$\hat{H} = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1|$
$P(|0\rangle) = \frac{1}{2}$
în superpoziție
$P(|1\rangle) = \frac{1}{2}$
VĂ MULȚUMESC!
$\langle P|P\rangle = 1$