SESIUNEA DE COMUNICĂRI MATEMATICE 2024
Rearanjarea unei serii numerice

Borodescu Bianca

Profesor îndrumător: Conf.univ.dr.Badea Gabriela

Universitatea Ovidius din Constanța
Facultatea de Matematică și Informatică

Înființarea și dezvoltarea CENTRULUI REGIONAL SUD-EST PENTRU ORIENTAREA ÎN CARIERA DE CERCETĂTOR – AD. AUGUSTA - cod 2/16.11.2022

7 Decembrie 2024

Ce ne propunem?

Vrem să demonstrăm că:

Având o serie numerică **absolut convergentă** care are suma seriei s, orice rearanjare a sa va fi absolut convergentă și va avea suma seriei s.

Orice serie **semiconvergentă** de numere reale poate fi rearanjată pentru a obține o serie care converge către o valoare fixată.

Definiție:

Fie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcție bijectivă si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale, considerăm seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definim un șir $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ a.î. $b_n = a_{\varphi(n)}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$

Atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi o **rearanjare** a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definiție:

Fie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcție bijectivă si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale, considerăm seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definim un șir $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ a.î. $b_n = a_{\varphi(n)}, \qquad (n = 1, 2, \dots)$.

Atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi o **rearanjare** a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Fie $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șirurile sumelor parțiale ale seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ respectiv $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

Teorema 1

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge la s, orice serie obținută prin inserarea parantezelor va converge tot la s (inserarea parantezelor păstrează convergența și permite gruparea termenilor).

În schimb, eliminarea parantezelor poate distruge convergența.

Teorema 1

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge la s, orice serie obținută prin inserarea parantezelor va converge tot la s (inserarea parantezelor păstrează convergența și permite gruparea termenilor).

În schimb, eliminarea parantezelor poate distruge convergența.

Teorema 2

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri și o funcție $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ a.î. $p(n)<p(m)$, dacă $n<m$. Se consideră seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{p(1)} \\ b_{n+1} &= a_{p(n)+1} + a_{p(n)+2} + \ldots + a_{p(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Am obținut $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ prin inserarea parantezelor în $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și dacă avem $M>0$ a.î. $p(n+1)-p(n)<M$, $\forall n\in\mathbb{N}$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge și sumele lor coincid.

Teorema 3

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică absolut convergentă și s suma seriei. Atunci orice rearanjare a sa este absolut convergentă și are suma s.

Teorema 3

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică absolut convergentă și s suma seriei. Atunci orice rearanjare a sa este absolut convergentă și are suma s.

Demonstrație:

Fie $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ = șirul sumelor parțiale pentru seria inițială,

și $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ = șirul sumelor parțiale pentru seria rearanjată.

Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat ca în *Def.* $(b_n = a_{\varphi(n)})$. Atunci:

$$|b_1| + \ldots + |b_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ are șirul sumelor parțiale majorat.
Prin urmare, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este absolut convergentă.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, conform definiției avem:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ fie } N_1 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } n \geq N_1,$$

$$\text{fie } N_2 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } m > n \geq N_2.$$

Pentru $m \to +\infty$ obținem că $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_2$.

Cum $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, conform definiției avem:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ fie } N_1 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } n \geq N_1,$$

$$\text{fie } N_2 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } m > n \geq N_2.$$

Pentru $m \to +\infty$ obținem că $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_2$.

Notăm $N = max\{N_1, N_2\}$, avem: $|s_N - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ și $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Atunci pentru $n = 1, 2, \dots$

$$|t_n - s| \leq |t_n - s_N| + \overbrace{|s_N - s|}^{<\frac{\varepsilon}{2}} < |t_n - s_N| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă alegem $M \in \mathbb{N}$ a.î. $\{1, 2, ..., N\} \subseteq \{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(M)\}$.

Având φ funcție bijectivă $\Longrightarrow M \geq N$. Atunci pentru $n \geq M$ vom avea $n \geq N$ și:

$$\begin{aligned}
|t_n - s_N| &= |(b_1 + b_2 ... + b_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_N)| \\
&= |\underbrace{a_{\varphi(1)}}_{b_1} + \underbrace{a_{\varphi(2)}}_{b_2} + ... + \underbrace{a_{\varphi(n)}}_{b_n} - a_1 - a_2 ... - a_N| \\
&= |\cancel{a_{\varphi(1)}} + \cancel{.....} + a_{\varphi(n)} - \cancel{a_1} - \cancel{...} - \cancel{a_N}| \\
&\leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + ... < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Dacă alegem $M \in \mathbb{N}$ a.î. $\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(M)\}$.

Având φ funcție bijectivă $\implies M \geq N$. Atunci pentru $n \geq M$ vom avea $n \geq N$ și:

$$\begin{aligned}
|t_n - s_N| &= |(b_1 + b_2 \ldots + b_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_N)| \\
&= |\underbrace{a_{\varphi(1)}}_{b_1} + \underbrace{a_{\varphi(2)}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{\varphi(n)}}_{b_n} - a_1 - a_2 \ldots - a_N| \\
&= |\cancel{a_{\varphi(1)}} + \cancel{\ldots\ldots} + a_{\varphi(n)} - \cancel{a_1} - \cancel{\ldots} - \cancel{a_N}| \\
&\leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Aveam că: $|t_n - s| < |t_n - s_N| + \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies |t_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Prin urmare, din $n \geq M \implies |t_n - s| < \varepsilon$ și deci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$. $\square$

Ipoteza absolut convergenței este esențială în teorema prezentată anterior *(Teorema 3)*.

Riemann a descoperit că orice serie semiconvergentă de numere reale poate fi rearanjată pentru a obține o serie care converge către o valoare fixată.

Teorema lui Riemann

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică semiconvergentă și fie $x, y \in [-\infty, \infty]$, cu $x \leq y$.
Atunci există o rearanjare a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, notată $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a.î.:

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = x \quad \text{și} \quad \limsup_{n\to\infty} t_n = y, \text{ unde } t_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Teorema lui Riemann

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică semiconvergentă și fie $x, y \in [-\infty, \infty]$, cu $x \leq y$.
Atunci există o rearanjare a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, notată $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a.î.:

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = x \quad \text{și} \quad \limsup_{n\to\infty} t_n = y, \text{ unde } t_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Demonstrație: Putem presupune, fără a restrânge generalitatea că niciun termen al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nu este 0.

$$\text{Fie } u_n = \frac{(|a_n| + a_n)}{2} \text{ și } v_n = \frac{(|a_n| - a_n)}{2}, \text{ pentru } n = 1, 2, \ldots$$

$$\text{Atunci } u_n \text{ și } v_n \geq 0 \quad \begin{cases} u_n + v_n &= |a_n| \\ u_n - v_n &= a_n \,, \end{cases} \qquad \text{pentru n=1,2,...}$$

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt convergente, atunci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ converge, } \textit{(Fals).}$$

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt convergente, atunci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ converge, } \textit{(Fals).}$$

Pentru $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă (sau viceversa) $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, *(Fals).*

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt convergente, atunci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ converge, } \textit{(Fals).}$$

Pentru $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă (sau viceversa) $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, *(Fals).*

Prin urmare, seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ trebuie să fie divergente.

Să notăm $p_1, p_2, \ldots$ termenii pozitivi (inclusiv 0) ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, în ordinea în care apar și $q_1, q_2, \ldots$, termenii negativi ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tot în ordinea în care apar.

Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} (-q_n)$ diferă față de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ doar prin termenii nuli și deci sunt divergente.

Să notăm $p_1, p_2, \ldots$ termenii pozitivi (inclusiv 0) ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, în ordinea în care apar și $q_1, q_2, \ldots$, termenii negativi ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tot în ordinea în care apar.

Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty}(-q_n)$ diferă față de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ doar prin termenii nuli și deci sunt divergente.

Să considerăm două șiruri arbitrare de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a.î. $y_1 > 0$ și $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Apoi să considerăm cel mai mic $k_1 \in \mathbb{N}$ a.î.:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} > y_1,$$

Apoi să considerăm cel mai mic $k_1 \in \mathbb{N}$ a.î.:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} > y_1,$$

apoi să considerăm cel mai mic $r_1 \in \mathbb{N}$ a.î.:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} + \underbrace{q_1 + \ldots + q_{r_1}}_{\text{termeni negativi}} < x_1, \ (x_1 < y_1),$$

Apoi să considerăm cel mai mic $k_1 \in \mathbb{N}$ a.î.:

$$p_1 + \dots + p_{k_1} > y_1,$$

apoi să considerăm cel mai mic $r_1 \in \mathbb{N}$ a.î.:

$$p_1 + \dots + p_{k_1} + \underbrace{q_1 + \dots + q_{r_1}}_{\text{termeni negativi}} < x_1, \ (x_1 < y_1),$$

apoi să considerăm cel mai mic număr întreg $k_2 > k_1$ a.î.:

$$p_1 + \dots + p_{k_1} + q_1 + \dots + q_{r_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > y_2,$$

Apoi să considerăm cel mai mic $k_1 \in \mathbb{N}$ a.î.:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} > y_1,$$

apoi să considerăm cel mai mic $r_1 \in \mathbb{N}$ a.î.:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} + \underbrace{q_1 + \ldots + q_{r_1}}_{\text{termeni negativi}} < x_1, \ (x_1 < y_1),$$

apoi să considerăm cel mai mic număr întreg $k_2 > k_1$ a.î.:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} + q_1 + \ldots + q_{r_1} + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2} > y_2,$$

după aceea, vom lua cel mai mic număr întreg $r_2 > r_1$ a.î.:

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} + q_1 + \ldots + q_{r_1} + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2} + q_{r_1+1} + \ldots + q_{r_2} < x_2.$$

Continuăm în acest fel prin inducție matematică.
Acum avem că:

$$\underbrace{p_1+\ldots+p_{k_1}}_{k_1 \text{ termeni pozitivi}} + \underbrace{q_1+\ldots+q_{r_1}}_{r_1 \text{ termeni negativi}} + \underbrace{p_{k_1+1}+\ldots+p_{k_2}}_{k_2 \text{ termeni pozitivi}} + \underbrace{q_{r_1+1}+\ldots+q_{r_2}}_{r_2 \text{ termeni negativi}} + \ldots (\bigstar)$$

este o rearanjare a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Continuăm în acest fel prin inducție matematică.
Acum avem că:

$$\underbrace{p_1 + \ldots + p_{k_1}}_{k_1 \text{ termeni pozitivi}} + \underbrace{q_1 + \ldots + q_{r_1}}_{r_1 \text{ termeni negativi}} + \underbrace{p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2}}_{k_2 \text{ termeni pozitivi}} + \underbrace{q_{r_1+1} + \ldots + q_{r_2}}_{r_2 \text{ termeni negativi}} + \ldots (\bigstar)$$

este o rearanjare a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dacă t_n este termenul general al șirului sumelor parțiale pentru seria rearanjată $(\bigstar)$, atunci prin construcția făcută:

$$t_{k_1+r_1+\ldots+k_{n-1}+r_{n-1}+k_n} > y_n \quad \text{și} \quad t_{k_1+r_1+\ldots+k_{n-1}+r_{n-1}+k_n+r_n} < x_n \quad \forall n \geq 1.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} t_n \geq \limsup\limits_{n\to\infty} y_n = y \\ \liminf\limits_{n\to\infty} t_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = x \quad (1) \end{cases}$$

Din rearanjarea seriei avem și:

$$t_1 \leq \ldots \leq t_{k_1} \leq y_1 + p_{k_1}$$

$$y_1 + p_{k_1} \geq t_{k_1+1} \geq \ldots \geq t_{k_1+r_1-1} \geq t_{k_1+r_1} \geq x_1 + q_{r_1}$$

$$x_1 + q_{r_1} \leq t_{k_1+r_1+1} \leq \ldots \leq t_{k_1+r_1+k_2} \leq y_2 + p_{k_2}$$

$$y_2 + p_{k_2} \geq t_{k_1+r_1+k_2+1} \geq \ldots \geq t_{k_1+r_1+k_2+r_2} \geq x_2 + q_{r_2}$$

... etc.

Deoarece p_n, $q_n \to 0$, pentru $n \to +\infty$, obținem că:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} t_n \le \limsup_{n\to\infty}(y_n + p_{k_n}) &\le \limsup_{n\to\infty}(y_n) + \limsup_{n\to\infty}(p_{k_n}) \\ &= \underbrace{\lim_{n\to\infty}(y_n)}_{=y} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}(p_{k_n})}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \\ &= y.\end{aligned}$$

Analog obținem: $\liminf_{n\to\infty}(t_n) \ge x$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \limsup_{n\to\infty} t_n \le y \\ \liminf_{n\to\infty} t_n \ge x \quad (2) \end{cases}$$

Din (1) și (2) obținem egalitatea.

$\square$

Remarcă:

Dacă $x = y$,

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = \limsup_{n\to\infty} t_n.$$

$\Longrightarrow$ $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent și limita șirului:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = x = y.$$

$\Longrightarrow$ Orice serie **semiconvergentă** de numere reale poate fi rearanjată pentru a obține o serie care converge către o valoare fixată (în cazul nostru, $x = y$).

Bibliografie

1. C.Costara, Analysis I and Analysis II, 2005–2006, p.64-67.
2. W.J.Kaczor, M.T.Nowak, Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series, Student Mathematical Library, volume 4, 2000, p.105-107.
3. D.Popa, Analiză Matematică, 1996.

Vă mulțumesc pentru atenția acordată!