Demonstrații elementare pentru principiul mărginirii uniforme - I

Bardaș Adriana

Facultatea de Matematică și Informatică

SESIUNEA DE COMUNICĂRI MATEMATICE 2024

Table of Contents

Cuprins

Fie $(X, \|\cdot\|)$ și $(Y, \|\cdot\|)$ spații normate și $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{L}(X;Y)$ o familie de operatori liniari și continui.

Definitie

Spunem că X este spațiu Banach dacă distanța generată de normă este completă.

Definitie

Spunem că $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ este uniform mărginită $\iff$ $\exists M \geq 0$ a.î.

$$\|T_\alpha\| \leq M, \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Definitie

Spunem că $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ este o familie punctual mărginită de operatori $\iff$ $\forall x \in X, \exists M_x \geq 0$ a.î.

$$\|T_\alpha(x)\| \leq M_x, \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Principiul mărginirii uniforme

Teorema

Fie $(X, \|\cdot\|)$ spațiu Banach si $(Y, \|\cdot\|)$ spațiu normat.
Fie $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{L}(X;Y)$ o familie punctual mărginită de operatori.
Atunci $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{L}(X;Y)$ este uniform mărginită.

Cuprins

Teorema de reprezentare a lui Riesz - Dualul unui spațiu Hilbert

Fie $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spațiu Hilbert și $f : H \to \mathbb{K}$ o funcțională liniară și continuă. Atunci $\exists ! y_f \in$ H astfel încât $f(x) = \langle x, y_f \rangle$ $(\forall x \in H)$. Mai mult,

$$\|f\| = \|y_f\|.$$

Principiul mărginirii uniforme pentru funcționale pe spații Hilbert

Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spațiu Hilbert și $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ o familie de vectori în H cu proprietatea că pentru $\forall x \in H, \exists M(x) \geq 0$ astfel încât:

$$|\langle x, y_\alpha\rangle| \leq M(x)\ (\forall\alpha \in \mathcal{A}).\ (1)$$

Atunci există $M \geq 0$ astfel încât

$$\|y_\alpha\| \leq M(\forall\alpha \in \mathcal{A}).\ (2)$$

Demonstrație:
Presupunem prin reducere la absurd că relația (2) nu este adevărată.
Fie $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ astfel încât $\|y_{\alpha_1}\| \geq 1^2$ și fie $e_1 = \frac{y_{\alpha_1}}{\|y_{\alpha_1}\|}$, cu $\|e_1\| = 1$

$$|\langle e_1, y_\alpha \rangle| \leq M(e_1)\ (\forall \alpha \in \mathcal{A})$$

$(\|y_\alpha\|)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subseteq \mathbb{R}$ nu e majorată, deci există $\alpha_2 \in \mathcal{A}$ astfel încât:

$$\|y_{\alpha_2}\| \geq 2^2 \text{ și } \frac{M(e_1)}{\|y_{\alpha_2}\|} \leq \frac{1}{2^2}.$$

Atunci

$$\frac{|\langle e_1, y_{\alpha_2}\rangle|}{\|y_{\alpha_2}\|} \leq \frac{1}{2^2}.$$

Fie

$$e_2 = \frac{y_{\alpha_2}}{\|y_{\alpha_2}\|} \in H \text{ cu } \|e_2\| = 1.$$

Așadar:

$$|\langle e_1, e_2\rangle| \leq \frac{1}{2^2}.$$

Fie acum $\alpha_3 \in \mathcal{A}$ astfel încât:

$$\|y_{\alpha_3}\| \geq 3^2 \text{ și } \frac{M(e_1) + M(e_2)}{\|y_{\alpha_3}\|} \leq \frac{1}{2^3}$$

și luăm $e_3 = \frac{y_{\alpha_3}}{\|y_{\alpha_3}\|} \in H$ cu $\|e_3\| = 1$. Atunci putem spune că:

$$\begin{aligned} |\langle e_1, e_3\rangle| + |\langle e_2, e_3\rangle| &= \frac{1}{\|y_{\alpha_3}\|}(|\langle e_1, y_{\alpha_3}\rangle| + |\langle e_2, y_{\alpha_3}\rangle|) \\ &\leq \frac{M(e_1) + M(e_2)}{\|y_{\alpha_3}\|} \leq \frac{1}{2^3} \end{aligned}$$

Prin inducție, găsim un șir $(y_{\alpha_n})_{n\geq 1} \subseteq (y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ cu proprietatea că:

$$\|y_{\alpha_n}\| \geq n^2 \; (\forall n \geq 1).$$

$$|\langle e_1, e_{n+1}\rangle| + \ldots + |\langle e_n, e_{n+1}\rangle| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \; (\forall n \geq 1), \text{unde}$$

$$e_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_{\alpha_n}}{\|y_{\alpha_n}\|}, (\forall n \geq 1).$$

Să arătăm acum că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n} \text{ converge în H.}$$

Pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ si $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{e_k}{k} \|^2 &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\|e_k\|^2}{k^2} + \sum_{1 \leq s < t \leq p} \frac{2Re\langle e_{n+s}, e_{n+t}\rangle}{(n+s)(n+t)} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} + \sum_{1 \leq s < t \leq p} \frac{2|\langle e_{n+s}, e_{n+t}\rangle|}{(n+s)(n+t)} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq s < t \leq p} |\langle e_{n+s}, e_{n+t}\rangle| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} + \frac{2}{n^2} \cdot (|\langle e_1, e_{n+t}\rangle| + \ldots + |\langle e_{n+t-1}, e_{n+t}\rangle|) \\
&\leq \frac{1}{2^{n+t+1}}\ , \forall 1 \leq t \leq p \ fixat
\end{aligned}$$

Așadar

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{e_k}{k}\|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}+\frac{4}{n^2}\ (\forall n,p\geq 1)$$

Cum

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{ converge }\Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k}{k}\right)_{n\geq 1}\subseteq H\text{ șir Cauchy.}$$

Iar cum H este complet, fie

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e_n}{n}\in H.$$

$$
\begin{aligned}
|\langle x, y_{\alpha_n}\rangle| &= \|y_{\alpha_n}\| \cdot |\langle x, e_n\rangle| \\
&\geq \|y_{\alpha_n}\| \cdot \left(\frac{|\langle e_n, e_n\rangle|}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\langle e_k, e_n\rangle|}{k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\langle e_k, e_n\rangle|}{k} \right) \\
&\geq \|y_{\alpha_n}\| \cdot \left(\frac{|\langle e_n, e_n\rangle|}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} |\langle e_k, e_n\rangle| - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k} \right) \\
&\geq \|y_{\alpha_n}\| \cdot \left(\frac{|\langle e_n, e_n\rangle|}{n} - \frac{1}{2^n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n \cdot 2^k} \right) \\
&\geq n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) \\
&\geq n - \frac{n(n+1)}{2^n} \to \infty \textit{ pentru } n \to +\infty, \text{contradicție.}
\end{aligned}
$$

Bibliografie

S.S. Holland Jr.,, *A Hilbert Space proof of the uniform boundedness theorem*, Amer. Math. Monthly, 1969, 40-41.