APLICAȚII ALE BAZELOR GRÖBNER ÎN TEORIA SEMNALELOR

Andreea-Georgiana Radu

Academia Navală "Mircea cel Bătrân"

Sesiunea de Comunicări Matematice Decembrie 2023

Prezentarea de astăzi urmărește articolul:

“P. Vandewalle, L. Sbaiz, M. Vetterli ,,Signal Reconstruction from multiple unregistered sets of samples using Gröbner bases”, IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings (Volume 3) 2006.”

CUPRINS

IDEAL MONOMIAL

Definiție

Un ideal I $\in K[X_1, \dots, X_n]$se numește ideal monomial dacă admite un sistem de generatori format numai din monoame, deci dacă există o submulțime M a lui $\mathbb{N}^n$ astfel încât:

I={$X^\alpha | \alpha \in M$} unde, dacă $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, atunci $X^\alpha = X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}$

Exemplu

În inelul de polinoame *K[X,Y]* idealul $I = (X^2Y^3, X^4Y^5, X^5Y^4)$ este ideal monomial.

Multigradul lui X^α este multiexponentul α și se notează cu

$$\alpha = mdeg X^\alpha$$

Gradul lui X^α este

$$|\alpha| = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

ORDONARE MONOMIALĂ

Definiție

O relație de ordine „≤” pe M (respectiv pe $\mathbb{N}^n$) se numește ordonare monomială dacă satisface următoarele condiții:

1.Este totală, adică pentru orice $X^\alpha, X^\beta \in M,$ $X^\alpha < X^\beta$ sau $X^\alpha = X^\beta$ sau $X^\alpha > X^\beta$ (sau, echivalent pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ sau $\alpha > \beta$).

2.Este compatibilă cu înmulțirea monoamelor, adică dacă $X^\alpha < X^\beta$ și X^γ este un monom arbitrar, atunci $X^{\alpha+\gamma} < X^{\beta+\gamma}$(echivalent, este compatibilă cu adunarea în $\mathbb{N}^n$, adică dacă $\alpha < \beta,$ atunci pentru orice $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $\alpha + \gamma < \beta + \gamma).$

3. $(M, \cdot)$ este bine ordonată, adică orice submulțime nevidă a lui M (respectiv $\mathbb{N}^n$) are prim element.

ORDONAREA LEXICOGRAFICĂ

Definiție

Fie $X^{\alpha} = {X_1}^{\alpha_1}{X_2}^{\alpha_2} \dots {X_n}^{\alpha_n}$ și $X^{\beta} = {X_1}^{\beta_1}{X_2}^{\beta_2} \dots {X_n}^{\beta_n}$. Spunem că $X^{\alpha} <_{lex} X^{\beta}$ dacă există $s \leq n$ astfel încât:

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n \text{ și } \alpha_s < \beta_s$$

Exemplu

Fie monoamele: X^2Y^3Z și $X^2Y^2Z^5$

Cum $\alpha = (2, 3, 1) \quad > \quad \beta = (2, 2, 5) \rightarrow X^2Y^3Z \quad > \quad X^2Y^2Z^5$

Exemplu

În $\mathrm{K}[X_1, \dots, X_4]$ cu ordonarea lexicografică considerăm polinomul

$$f = 5{X_1}^3X_2X_4 + {X_2}^3 + X_3X_4$$

Notăm monomul inițial al lui f cu $lm(f)$:

$$lm(f) = {X_1}^3X_2X_4$$

Iar $lt(f)$ este termenul general:

$$lt(f) = 5{X_1}^3X_2X_4$$

TEOREMĂ DE ÎMPĂRȚIRE CU REST

Fie < o ordonare monomială pe $K[X_1, \dots, X_n]$ și $F = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ un s-uplu ordonat de polinoame din $K[X_1, \dots, X_n]$.

Atunci, pentru orice polinom $f \in K[X_1, \dots, X_n]$,există $a_1, a_2, \dots, a_s$ și r în $K[X_1, \dots, X_n]$ astfel încât

$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_s f_s + r$ și $r = 0$ sau r este o combinație K-liniară de monoame care nu se divid prin nici un monom din mulțimea $\{lm_<(f_i) | i = \overline{1, s}\}$.

Mai mult, pentru i cu proprietatea că $a_i f_i \neq 0$

$$mdeg\, f \geq mdeg(a_i f_i).$$

Definiție

Fie $<$ o ordonare monomială fixată pe $K[X_1, \dots, X_n]$ și I un ideal în $K[X_1, \dots, X_n]$. Idealul monomial $in_<(I) = \langle lm_<(f) \mid f \in I, f \neq 0 \rangle$ se numește idealul inițial al lui I.

Observație

Dacă I este generat de polinoamele $f_1, \dots, f_s$, atunci idealul generat de monoamele $lm_<(f_i)$, pentru $1 \leq i \leq s$, este inclus în idealul inițial al lui I, dar, în general, incluziunea este strictă.

Exemplu

Fie $I = (f_1, f_2, f_3) \subset K[X, Y, Z]$, unde

$$f_1 = XY^2 - Z + ZY,\ f_2 = XY - Z^3,\ f_3 = XY^3 + XZ^2.$$

Atunci

$$\langle lm_{lex}(f_i) | 1 \leq i \leq 3 \rangle = \langle XY^2, XY, XY^3 \rangle = \langle XY \rangle$$

Fie polinomul

$$f = Y^2 f_1 + Z^2 f_2 - Y f_3 = XY^4 - ZY^2 + ZY^3 + XYZ^2 - Z^5 - XYZ^2 - XY^4$$

$$ZY^3 \notin \langle XY^2, XY, XY^3 \rangle$$

Prin urmare

$$\langle lm_{lex}(f_i) | 1 \leq i \leq 3 \rangle \subsetneq in_{lex} I$$

BAZĂ GRÖBNER

Definiție

Fie $<$ o ordonare monomială fixată și I un ideal în inelul $K[X_1, \dots, X_n]$. O submulțime G=$\{g_1, \dots, g_s\} \subset I$ se numește *bază Gröbner* a lui I dacă monoamele dominante ale polinoamelor din G generează idealul inițial al lui I.

Un instrument important în aflarea bazei Gröbner este reprezentată de algoritmul Buchberger, în a cărui aplicare este necesară noțiunea de S-polinom.

Fie f, g polinoame nenule din $K[X_1, \dots, X_n]$ și $<$ o ordonare monomială fixată.

$$lm_<(f) = X^\alpha, lm_< (g) = X^\beta \text{ și } X^\gamma = lcm(X^\alpha, X^\beta)$$

unde lcm reprezintă cel mai mic multiplu comun a două monoame.

Polinomul $S(f, g) = \frac{X^\gamma}{lt_<(f)} f - \frac{X^\gamma}{lt_<(g)} g$ se numește S-polinomul perechii (f, g).

ALGORITMUL BUCHBERGER

input: $F = (g_1, g_2, \ldots, g_s)$ // F este un sistem de generatori pentru idealul I.

output: G $= (g_1, g_2, \ldots, g_t)$ // G este bază Gröbner pentru I.

$G := F$

repeat

$G' = G$

for $p, q \in G', p \neq q$ do S := restul împărțirii lui $S(p, q)$ la G'

if $S \neq 0$ then $G := G \cup S$

end if

end for

until $G = G'$

Fie $K[X,Y,Z]$, ordonarea lexicografică cu $X > Y > Z$ și $I = (X^3 - Y,\ Z - 2,\ X + 3)$

Se dă baza $G = \{g_1, g_2, g_3\}$, unde $g_1 = X^3 - Y$, $g_2 = Z - 2$, $g_3 = X + 3$.

S-polinomul $S(g_1, g_2)$

$S(g_1, g_2) = \frac{X^3 \cdot Z}{X^3} \cdot (X^3 - Y) - \frac{X^3 \cdot Z}{Z}(Z-2) = 2X^3 - ZY$, iar restul împărțirii acestuia la baza $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ este 0.

S-polinomul $S(g_1, g_3)$

$S(g_1, g_3) = \frac{X^3}{X^3} \cdot (X^3 - Y) - \frac{X^3}{X} \cdot (X+3) = -3X^2 - Y$, iar restul împărțirii acestuia la baza $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ este $-Y-27$.

Adăugăm g_4 la baza G.

Continuăm cu S-polinomul $S(g_1, g_4)$

$$S(g_1, g_4) = \frac{X^3 \cdot Y}{X^3} \cdot (X^3 - Y) - \frac{X^3 \cdot Y}{-Y}(-Y - 27) = -27\,X^3 - Y^2$$

Restul împarțirii S-polinomului la baza $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este 0.

S-polinomul $S(g_2, g_3)$

$S(g_2, g_3) = \frac{X \cdot Z}{Z}(Z-2) \; - \; \frac{X \cdot Z}{X}(X+3) = -2X - 3Z$, iar restul împărțirii acestuia la baza $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este 0.

S-polinomul $S(g_2, g_4)=$

$S(g_2, g_4) = \frac{Z \cdot Y}{Z} \cdot (Z-2) - \frac{Z \cdot Y}{-Y} \cdot (-Y-27) = -2Y - 27$, restul împărțirii acestuia la baza $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este 0.

S-polinomul $S(g_3, g_4)$

$S(g_3, g_4) = \frac{X \cdot Y}{X} \cdot (X+3) - \frac{X \cdot Y}{-Y}(-Y-27) = 27X + 3Y$, iar restul împărțirii acestuia la baza

$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este 0.

Așadar $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este bază Gröbner pentru I relativ la *lex*.

TEORIA SEMNALELOR

Definiție

Un semnal este o mărime fizică măsurabilă purtătoare de informație care poate fi prelucrată și transmisă la distanță (sau recepționată).În funcție de timp, semnalul poate fi împărțit în două tipuri:

- semnal cu timp continuu (analogic)
- semnal cu timp discret (numeric)

Aparatul matematic pentru un semnal definit în timp continuu este o funcție care are următoarea formă

$$x : T \rightarrow M, t \rightarrow x(t), \text{ pentru orice } t \in T.$$

TEORIA RECONSTRUCȚIEI SEMNALULUI

Considerăm următorul semnal:

$$f\ (t)\ = \sum_{l=0}^{L-1} X_l \phi_l(t)$$

unde $\phi_l(t)$ reprezintă elementele bazei B în care este considerat semnalul. Dată baza B, formată din polinoame, putem să reconstruim semnalul cu ajutorul bazelor Gröbner .

Folosind sistemul

$$Y\ = \phi_t X$$

aflăm ecuațiile polinomiale.

Rămâne calcularea unei baze Gröbner pentru idealul generat de polinoamele din sistem. Pentru aceasta, apelăm la algoritmul Buchberger.

EXEMPLU

Considerăm:

M=2 numărul mulțimilor

N=2 numărul eșantioanelor

L=3 numărul funcțiilor din bază

Considerăm cazul în care baza B este baza dată de funcțiile:

$$\phi_l(t) = t^l, \text{unde } l \in \{0, 1, 2\}$$

Considerăm parametrii semnalului sub forma vectorului coeficienților:

$$X = \begin{pmatrix} 64 \\ -24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Valorile defazajului sunt reprezentate sub forma vectorului:

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Pentru t_m avem următoarea relație

$$Y_m = \phi_{t_m} X$$

Elementele matricei ϕ_{t_m} au următoarea formă

$$\phi_{t_m}(i,j) = \phi_j(\frac{i}{N} + t_m)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 64 \\ -24 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{64} & \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{25}{64} & \frac{5}{8} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 64 \\ -24 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$Y_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \; Y_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pentru a afla vectorii Y_0 și Y_1 am presupus cunoscut defazajul t_1 și vectorul X.

În continuare considerăm cunoscuți vectorii Y_0, Y_1 și vrem să aflăm componentele vectorului X împreună cu defazajul t_1.

Exemplu 2

Pornind de la următorul sistem:

$$\phi_t \cdot X = Y$$

$$\phi_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ {t_1}^2 & t_1 & 1 \\ (\frac{1}{2} + t_1)^2 & \frac{1}{2} + t_1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Unde elementele matricei sunt:

$$\phi_{t_1}(0,0) = \phi_0\left(\frac{0}{2} + t_1\right) = {t_1}^0 = 1$$

$$\phi_{t_1}(0,1) = \phi_1\left(\frac{0}{2} + t_1\right) = t_1$$

$$\phi_{t_1}(0,2) = \phi_2\left(\frac{0}{2} + t_1\right) = {t_1}^2$$

$$\phi_{t_1}(1,0) = \phi_0\left(\frac{1}{2} + t_1\right) = \left(\frac{1}{2} + t_1\right)^0 = 1$$

$$\phi_{t_1}(1,1) = \phi_1\left(\tfrac{1}{2} + t_1\right) = \tfrac{1}{2} + t_1$$

$$\phi_{t_1}(1,2) = \phi_2\left(\frac{1}{2} + t_1\right) = \left(\frac{1}{2} + t_1\right)^2$$

Dezvoltând obținem următorul sistem:

$$\begin{cases} x_2 + 4 = 0 \\ \frac{1}{4}x_0 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 {t_1}^2 + x_1 t_1 + x_2 + 6 = 0 \\ x_0 {t_1}^2 + x_0 t_1 + \frac{1}{4}x_0 + x_1 t_1 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Rescriem într-un sistem de ecuații polinomiale:

$$\begin{cases} p_0 = x_2 + 4 \\ p_1 = \frac{1}{4}x_0 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ p_2 = x_0 {t_1}^2 + x_1 t_1 + x_2 + 6 \\ p_3 = x_0 {t_1}^2 + x_0 t_1 + \frac{1}{4}x_0 + x_1 t_1 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 - 6 \end{cases}$$

Așadar, obținem următoarea bază Gröbner redusă:

$$\begin{cases} g_0 = x_2 + 4 \\ g_1 = x_0 - 64 \\ g_2 = x_1 + 24 \\ g_3 = t_1 - \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Soluția sistemului este:

$$\begin{cases} x_2 = -4 \\ x_0 = 64 \\ x_1 = -24 \\ t_1 = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Deci

$X = \begin{pmatrix} 64 \\ -24 \\ -4 \end{pmatrix}$ și defazajul $t_1 = \frac{1}{8}$

BIBLIOGRAFIE

- V. Ene, J. Herzog, Gröbner Bases in Commutative Algebra, AMS, Graduate Studies in Mathemathics, vol 130, 2012.
- P. Vandewalle, L. Sbaiz, M. Vetterli ,,Signal Reconstruction from multiple unregistered sets of samples using Gröbner bases”, IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings (Volume 3) 2006.

VĂ MULȚUMESC!