Elipsa de aur

Denis - Ștefan Paleru

Academia Navală “Mircea cel Bătrân” Constanța

Sesiunea de Comunicări Matematice Decembrie 2023

Obiective:

- Numărul de aur
- Elipsa de aur
- Proprietățile elipsei de aur

Prezentarea urmărește articolul "Ellipse: what else?" The Mathematical Gazette, nr. 99(546), 2015, pages 481-485.

Autor: Aldo Scimone

<u>Numărul de aur</u>

Euclid a definit numărul de aur (ϕ) ca fiind simpla împărțire a unui segment de dreaptă în ceea ce el a numit "medie" și "extremă rație". Acesta, a spus în cartea sa, *“Elementele”,* că segmentul AB este împărțit în extremă rație și medie cu C dacă $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

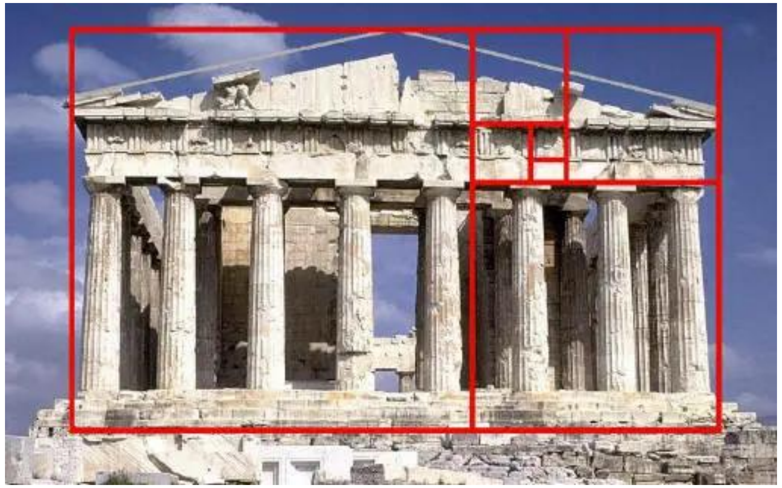
Deși, matematicianul nu a folosit noțiunea de “număr de aur”, acest raport a fost folosit mai departe ca “numărul de aur” sau “secțiunea de aur”.

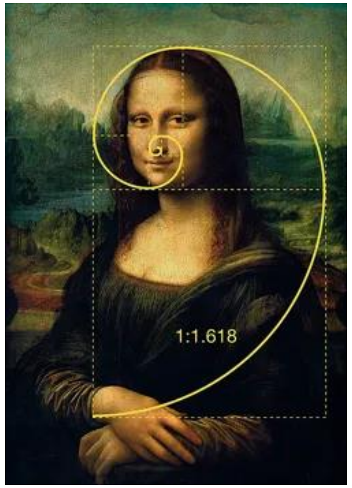
Aplicații ale numărului de aur:

Aplicaţiile numărului de aur, de fapt ale raportului ca atare, se regăsesc la punerea în proporţie a lucrărilor în arhitectură, pictură, sculptură, estetică şi artă în general, ceea ce confirmă interesul manifestat de-a lungul timpului pentru acest număr.

Proporţia divină a condus la construirea Dreptunghiului de aur, în care raportul laturilor este egal cu numărul de aur. Acest tip de dreptunghi este considerat ca fiind deosebit de estetic şi ca urmare a fost şi este intens utilizat în arhitectură şi artă.

Exemplu: se consideră că faţa Giocondei lui da Vinci se încadrează într-un astfel de dreptunghi, iar în construcţia Parthenonului din Atena se regăsesc cel puţin două astfel de dreptunghiuri.





Proprietăți:

1. ϕ este soluția pozitivă a ecuației $x^2 - x - 1 = 0$

2. $\phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618 \ldots$

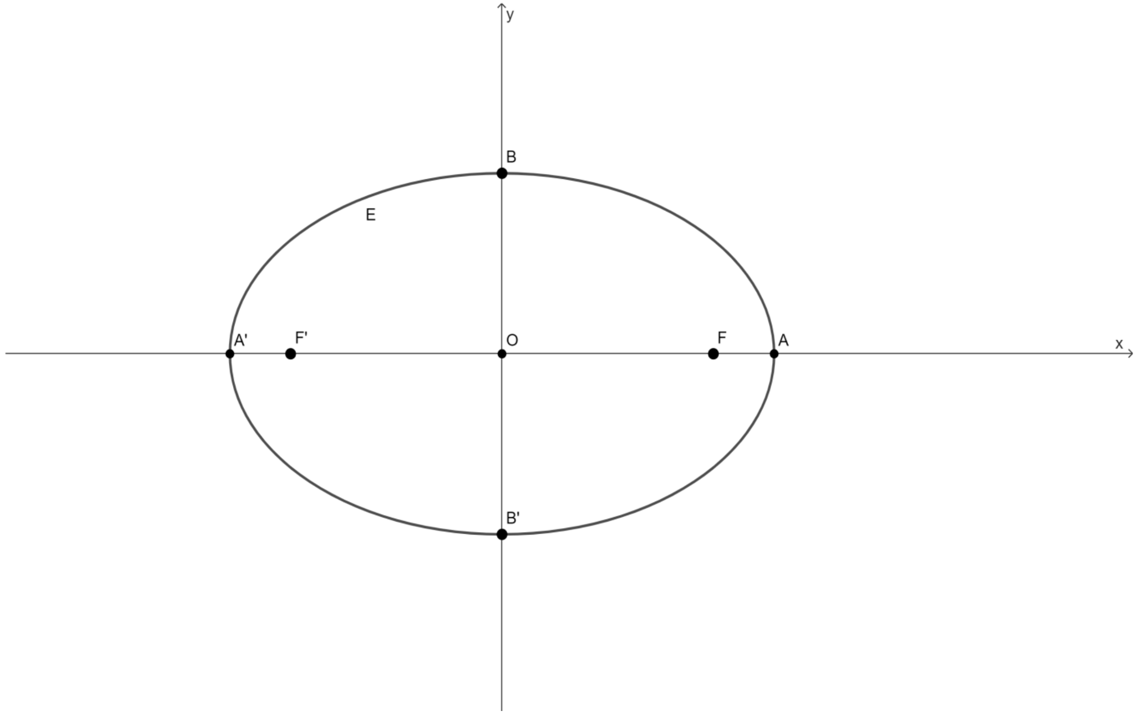
3. ϕ verifică ecuația $\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Rightarrow \phi^2 = \phi + 1$

4. $\frac{1}{\phi} = \frac{\phi^2 - \phi}{\phi} = \frac{\phi \cdot (\phi - 1)}{\phi} = \phi - 1$

Definiție: Elipsa reprezintă locul geometric al punctelor pentru care suma distanțelor la două puncte fixe numite focare este constantă.

Observație: Ecuația elipsei este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$

Observație: Focarele elipsei au coordonatele $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$, unde $c = \sqrt{a^2 - b^2}, a > b$.

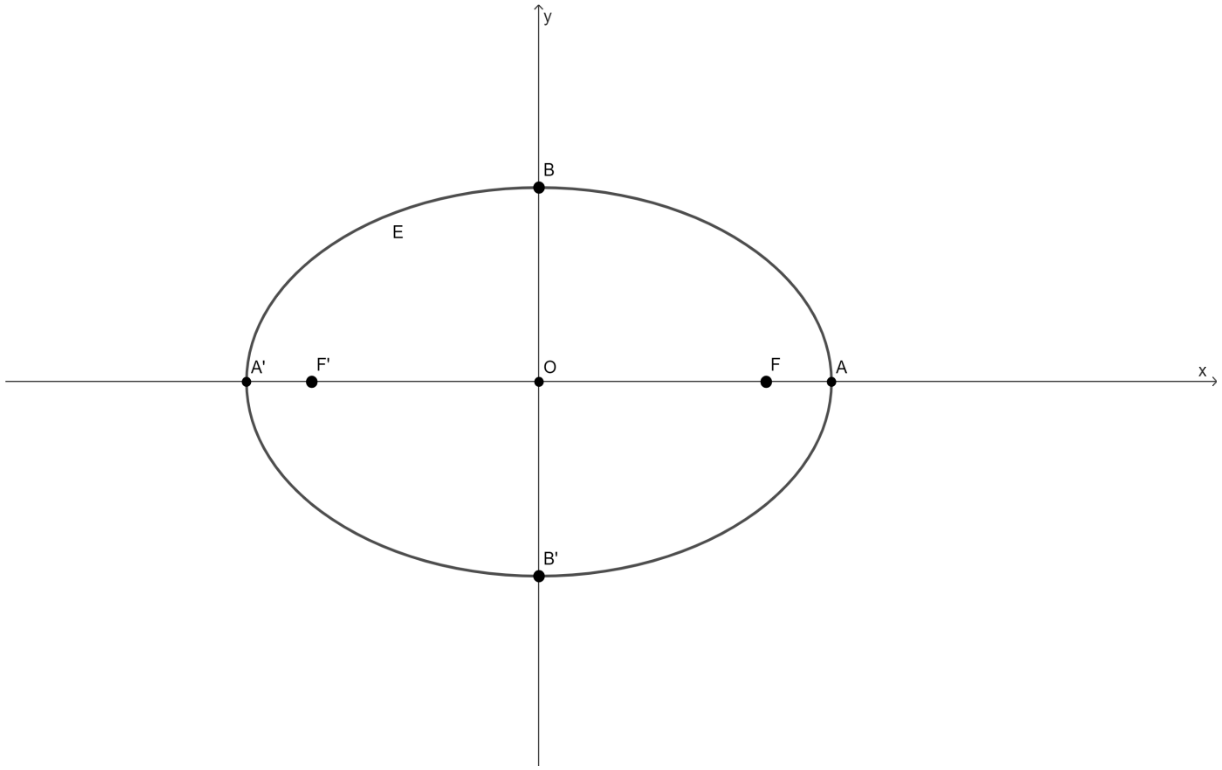


<u>Definiție:</u> Elipsa de aur este elipsa în care raportul dintre semiaxa mare si cea mică este egal cu raportul de aur, adică $\frac{a}{b} = \phi$.

<u>Observație:</u> Ecuația elipsei de aur este $x^2 + \phi^2 \cdot y^2 = b^2 \cdot y^2$.

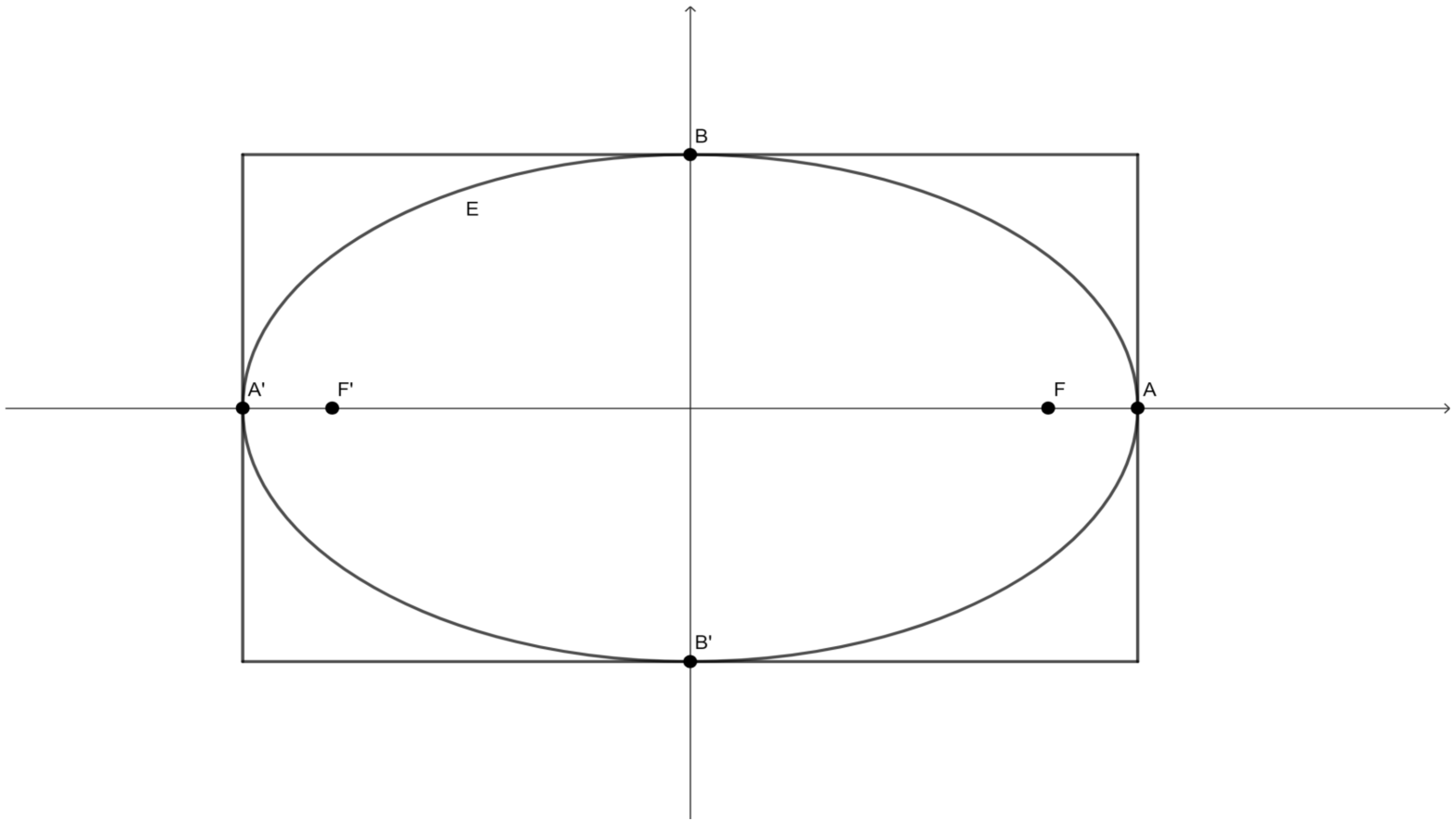
Într-adevar, pornind de la $\frac{a}{b} = \phi \Leftrightarrow a = b \cdot \phi$ și o elipsă oarecare de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se obține ecuația elipsei de aur.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(b \cdot \phi)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2 \cdot \phi^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \phi^2 \cdot y^2 = b^2 \cdot y^2$$



Observație: Dreptunghiul circumscris elipsei de aur este un dreptunghi de aur.

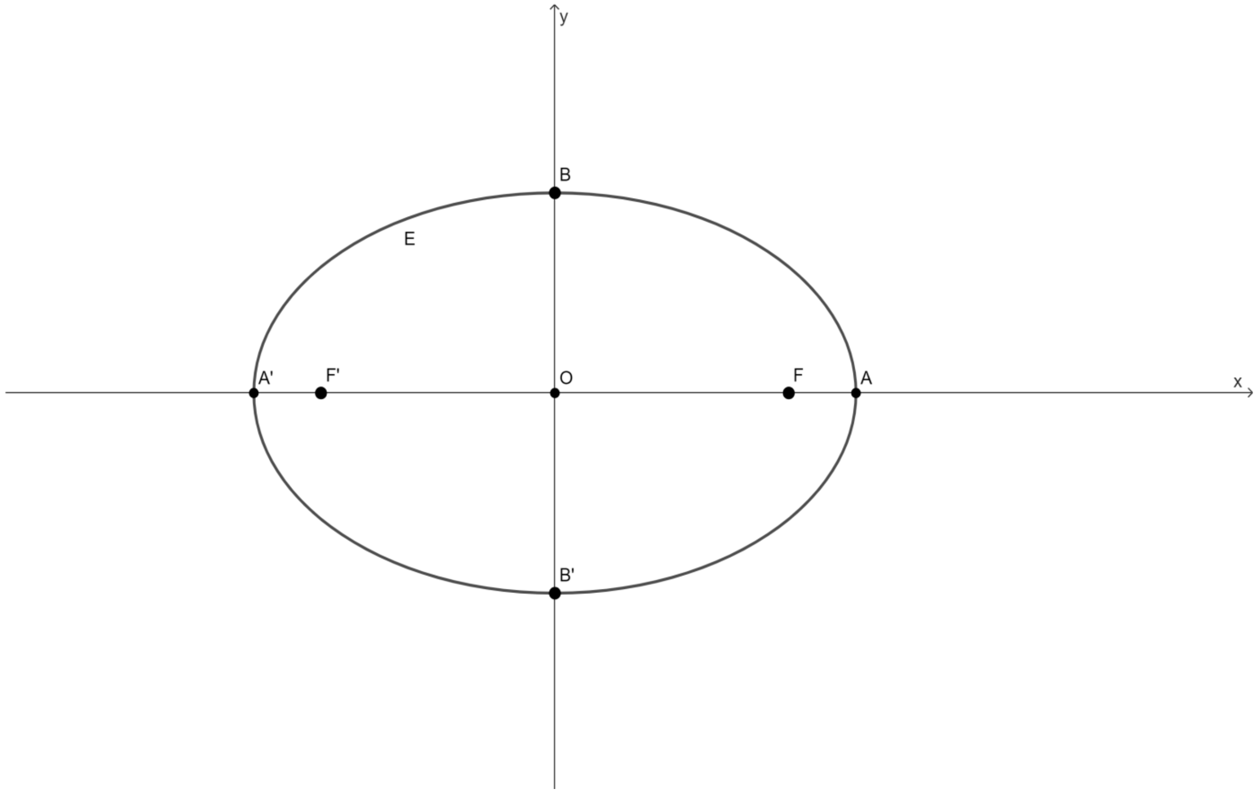
Fie lungimea dreptunghiul $L = 2 \cdot a$ si lățimea $l = 2 \cdot b$. Atunci raportul $\frac{L}{l} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot b} = \frac{a}{b} = \phi$ și reprezintă raportul de aur, dreptunghiul fiind de aur.



Observație: Focarele elipsei de aur au coordonatele $F\left(b\sqrt{\phi}, 0\right)$, respectiv $F'\left(-b\sqrt{\phi}, 0\right)$.

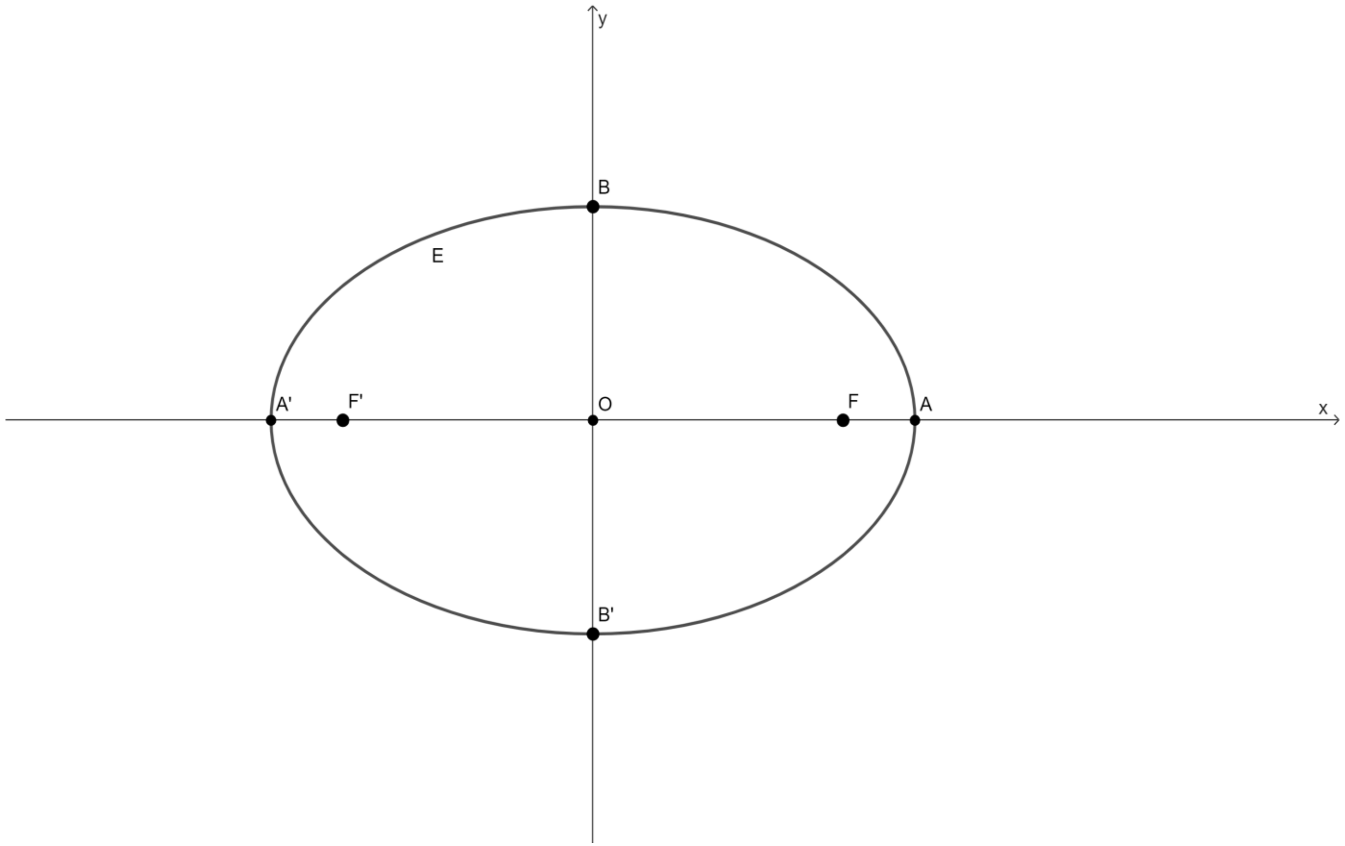
Într-adevăr, știind că focarele au coordonatele $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$, unde c= $\sqrt{a^2 - b^2}$ avem

$$c = \sqrt{(b \cdot \phi)^2 - b^2} = \sqrt{b^2 \cdot \phi^2 - b^2} = \sqrt{b^2 \cdot (\phi^2 - 1)} = b\sqrt{\phi^2 - 1} = b\sqrt{\phi}.$$



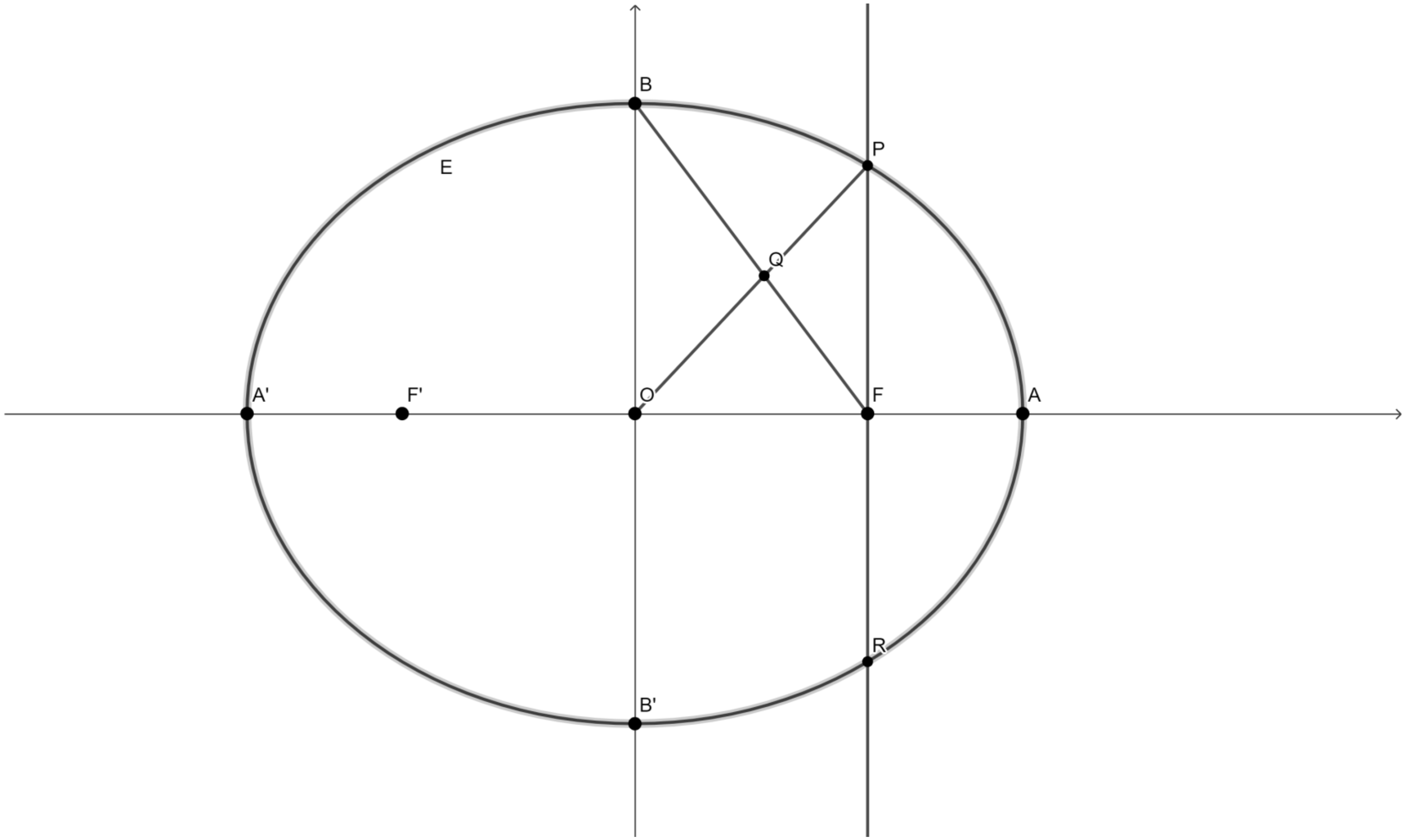
Observație: Excentricitatea elipsei de aur este $e = \sqrt{\phi - 1}$

Într-adevăr, $e = \frac{c}{a} = \frac{b\sqrt{\phi}}{b \cdot \phi} = \sqrt{\frac{\phi}{\phi^2}} = \sqrt{\frac{1}{\phi}} = \sqrt{\frac{\phi^2 - \phi}{\phi}} = \sqrt{\frac{\phi(\phi - 1)}{\phi}} = \sqrt{\phi - 1}$.



Propoziție:

Fie E o elipsă de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, F, F' focarele, $\{A\}= E\cap Ox$, $\{B\}=E\cap Oy$. Dreapta $x=c$ intersectează elipsa în punctul P. Fie $\{Q\}=BF\cap OP$. Atunci E este elipsă de aur dacă și numai dacă ΔOBQ este isoscel.



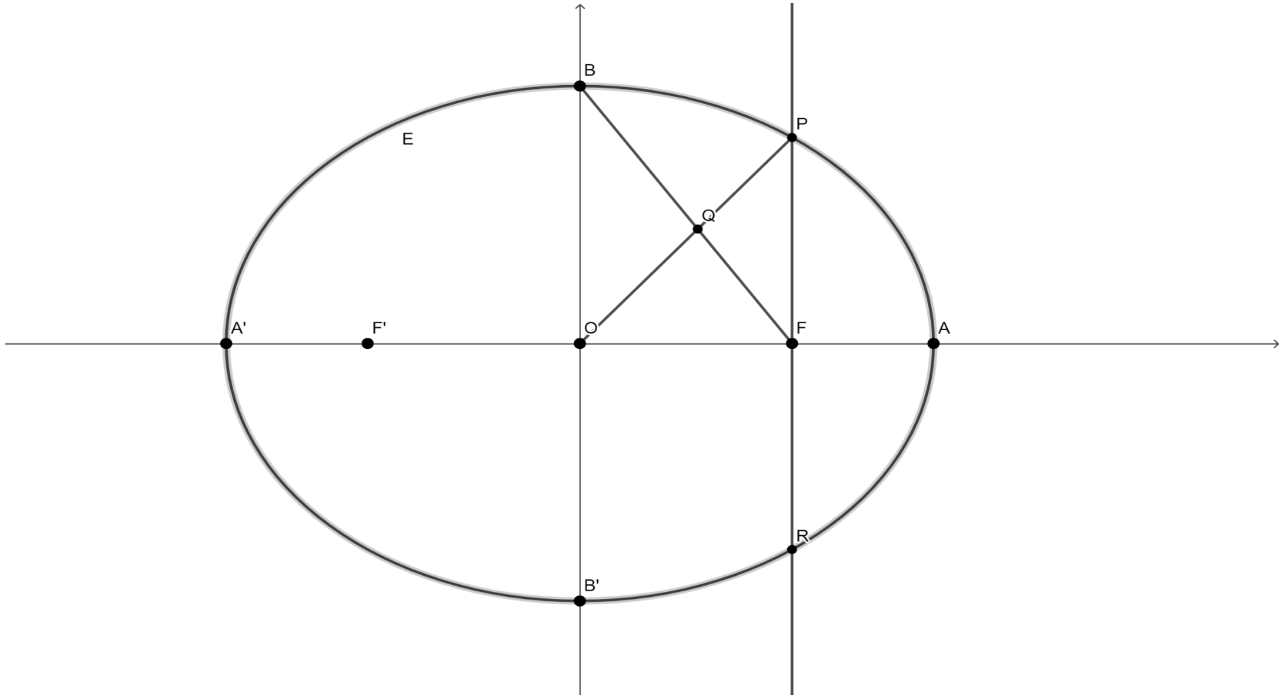
Demonstrație:

“=>” Știind că elipsa este de aur. Vrem să arătăm că ΔOBQ este isoscel. Vom demonstra că $\|BQ\| = \|OB\|$.

Știm că $c = b\sqrt{\phi}$. Cum $\{P\}=\{x=c\}\cap E$ atunci coordonatele punctului de P sunt date de soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} E \\ x = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \phi^2 \cdot y^2 = b^2 \cdot \phi^2 \\ x = b\sqrt{\phi} \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{b^2 \cdot (\phi - 1)}{\phi}} = \frac{b}{\phi}$$

Deci coordonatele punctului P sunt $\left(b\sqrt{\phi}, \frac{b}{\phi}\right)$.

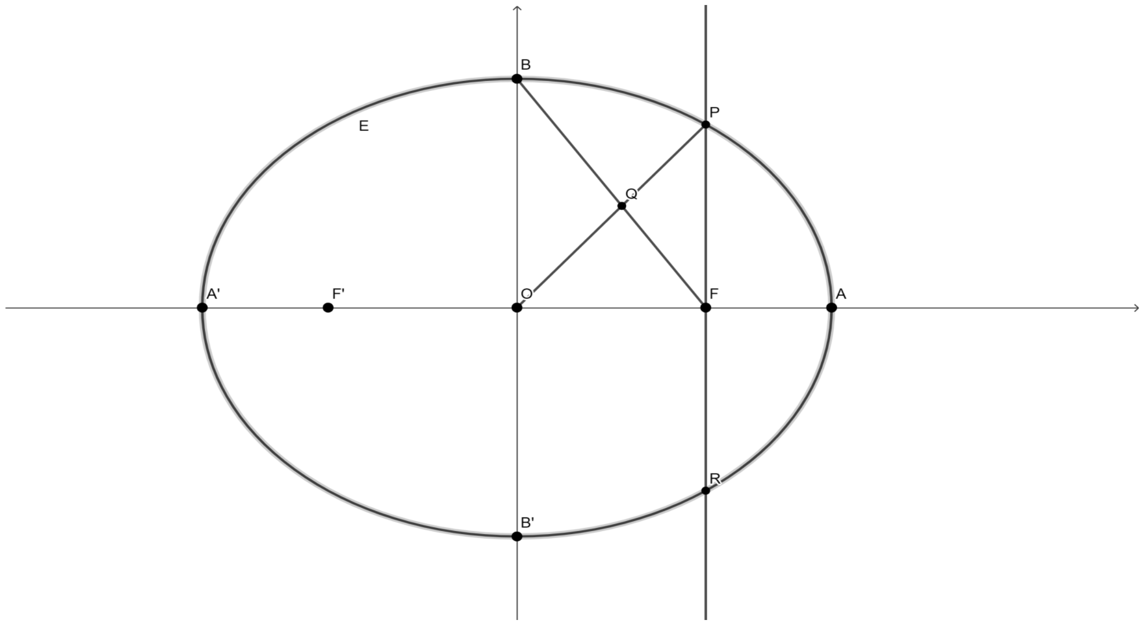


Ecuația dreptei care trece prin punctele $B(0, b)$ și $F\left(b\sqrt{\phi}, 0\right)$ este :

$$BF{:}\ \frac{x-x_B}{x_F-x_B}=\frac{y-y_B}{y_F-y_B} \Leftrightarrow -b\cdot x=(y-b)\cdot b\sqrt{\phi} \Leftrightarrow -x=(y-b)\sqrt{\phi} \Rightarrow (y-b)\sqrt{\phi}+x=0\ .$$

Ecuația dreptei care trece prin punctele $O(0,0)$ și $P\left(b\sqrt{\phi}, \frac{b}{\phi}\right)$ este :

$$OP{:}\ \frac{x-x_O}{x_P-x_O}=\frac{y-y_O}{y_P-y_O} \Leftrightarrow \frac{x}{b\sqrt{\phi}}=\frac{y}{\frac{b}{\phi}} \Rightarrow \frac{b}{\phi}\cdot x=y\cdot b\sqrt{\phi} \Leftrightarrow y\sqrt{\phi}-\frac{x}{\phi}=0.$$



Știm că $\{Q\} = BF \cap OP$, vrem coordonatele punctului Q.

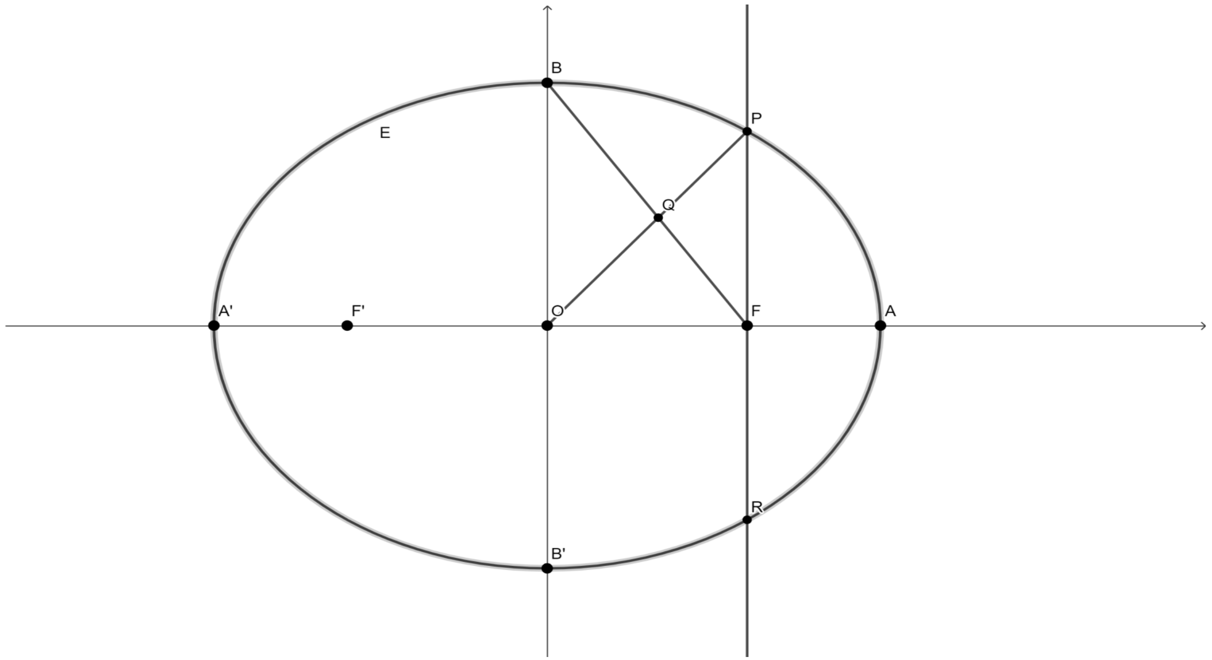
Coordonatele punctului Q sunt date de soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} OP \\ BF \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\phi} \cdot y = \dfrac{1}{\phi} \cdot x \\ \sqrt{\phi} \cdot y - b\sqrt{\phi} = -x \end{cases}$$

$x = -y\sqrt{\phi} + b\sqrt{\phi}$

$\Rightarrow y\sqrt{\phi} = \frac{1}{\phi}\left(-\sqrt{\phi} \cdot y + b\sqrt{\phi}\right) \Rightarrow y = \frac{b}{\phi+1} = \frac{b}{\phi^2}.$

Deci coordonatele punctului Q sunt $\left(\frac{b\sqrt{\phi}}{\phi}, \frac{b}{\phi^2}\right)$.



Aflăm lungimile segmentelor OB, respectiv BQ, pentru a demonstra că $\|BQ\| = \|OB\|$.

Lungimea segmentului OB este

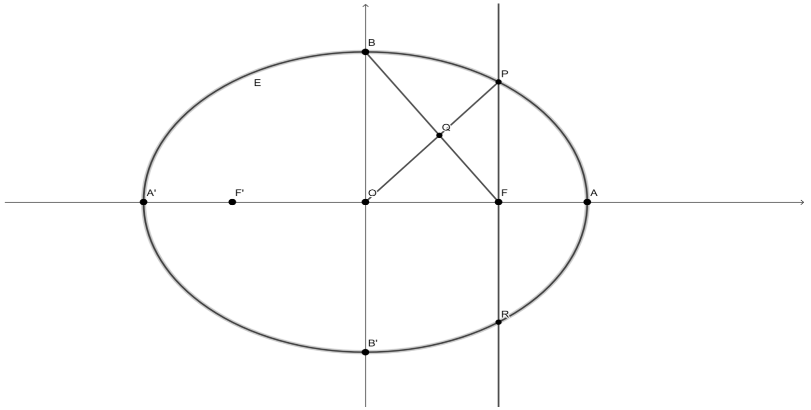
$$\|OB\| = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{b^2} = b.$$

Lungimea segmentului BQ este

$$\|BQ\| = \sqrt{\left(x_Q - x_B\right)^2 + \left(y_Q - y_B\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b\sqrt{\phi}}{\phi} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{\phi^2} - b\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2\cdot\phi^3 + b^2 - 2\cdot b^2\cdot\phi^2 + \phi^4\cdot b^2}{\phi^4}} =$$

$$\frac{b}{\phi^2}\sqrt{\phi^4 + \phi^3 - 2\phi^2 + 1} = \frac{b}{\phi^2}\sqrt{\phi^4 + \phi^3 - \phi^2 - \phi} = \frac{b}{\phi^2}\sqrt{(\phi^2 - 1)(\phi^2 + \phi)} = \frac{b}{\phi^2}\sqrt{\phi^2(\phi + 1)} = \frac{b}{\phi^2}\sqrt{\phi^2 \cdot \phi^2} = b.$$

Cum $\|BQ\| = \|OB\|$, înseamnă că ΔOBQ este isoscel.

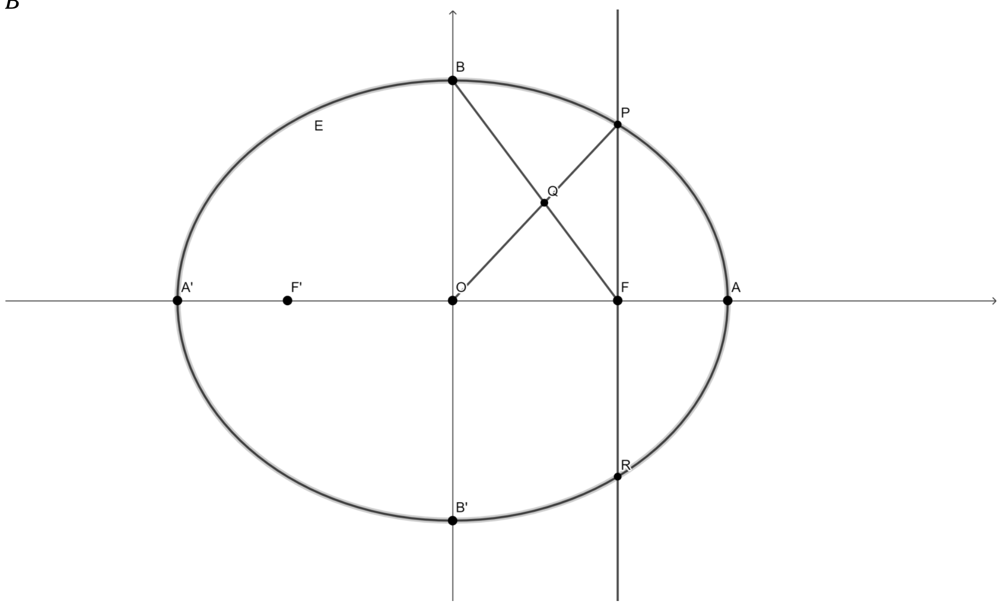


“<=“ Fie E o elipsă de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Știind că ΔOBQ este isoscel, cu $\|BQ\|=\|OB\|$, vrem să demonstrăm că elipsa E este de aur, adică $\frac{a}{b}=\phi$.

Știind că $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ unde $c=\sqrt{a^2-b^2}$ iar $\{Q\}=BF\cap OP$, vrem să determinăm ecuațiile dreptelor BF și OP pentru a afla coordonatele punctului Q.

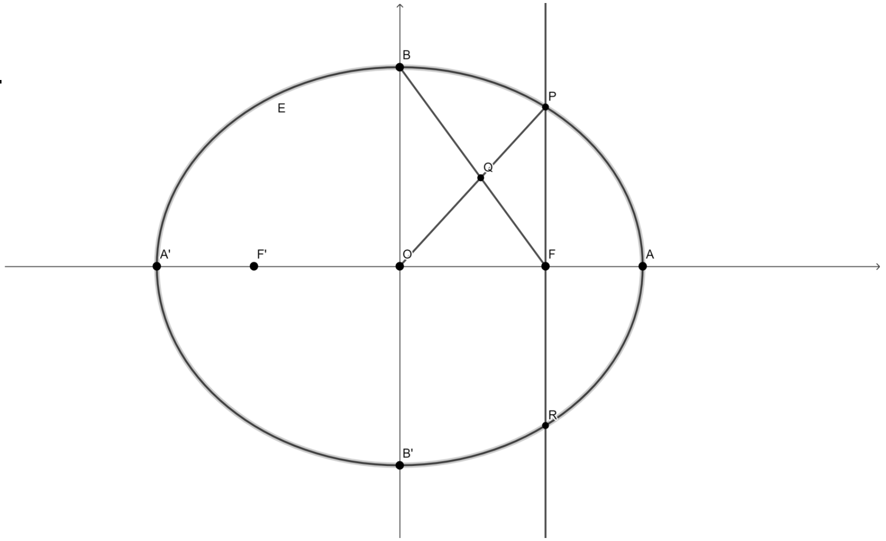
Ecuația dreptei care trece prin punctele $B(0,b)$ și $F\left(b\sqrt{\phi},0\right)$ este

$$BF\colon \frac{x-x_B}{x_F-x_B}=\frac{y-y_B}{y_F-y_B} \Leftrightarrow \frac{x}{c}=\frac{y-b}{-b} \Leftrightarrow -b\cdot x=c(y-b) \Leftrightarrow b\cdot x=-\sqrt{a^2-b^2}\cdot(y-b)$$



$\{P\}=\{x=c\}\cap E$ ⇒ Coordonatele punctului P sunt date de soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} E \\ x=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x=c \end{cases} \Rightarrow y=\sqrt{\frac{b^4}{a^2}}=\frac{b^2}{a}$$



Coordonatele punctului P sunt $\left(\sqrt{a^2-b^2},\frac{b^2}{a}\right)$

Ecuația dreptei care trece prin punctele $O(0,0)$ și $P\left(\sqrt{a^2-b^2},\frac{b^2}{a}\right)$

$$OP\colon \frac{x-x_O}{x_P-x_O}=\frac{y-y_O}{y_P-y_O} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{y}{\frac{b^2}{a}} \Rightarrow \frac{b^2}{a}\cdot x=y\sqrt{a^2-b^2}$$

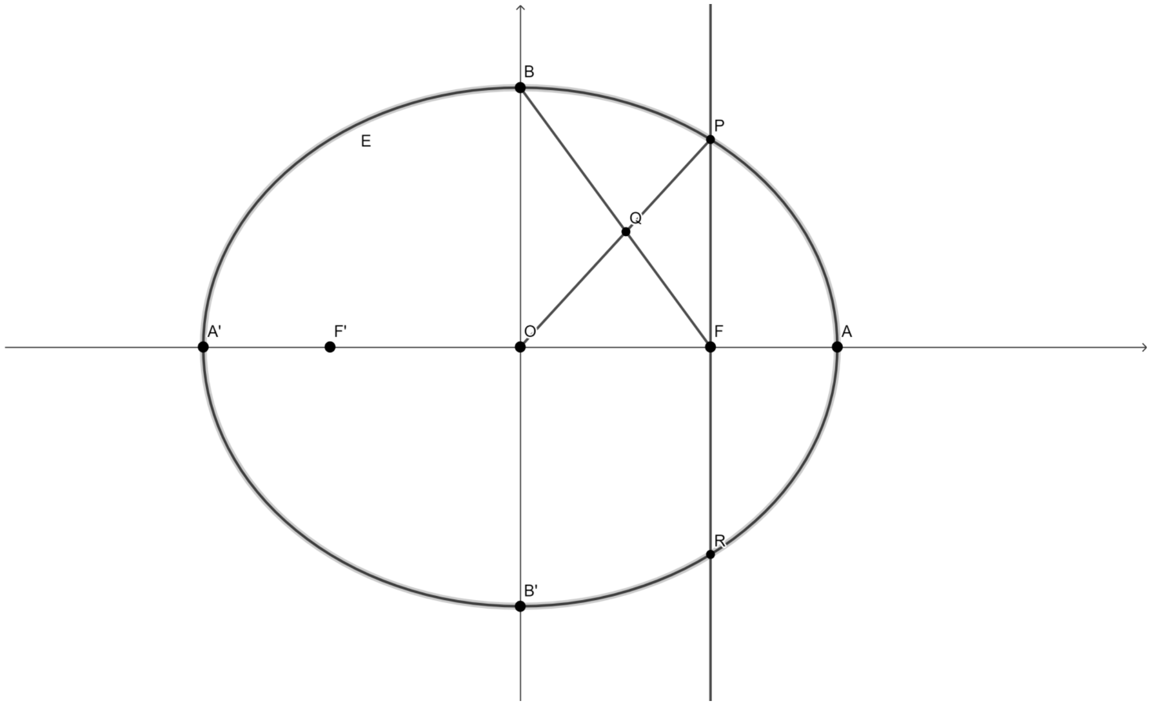
Coordonatele punctului Q le determinăm, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} OP \\ BF \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{a^2-b^2} = \frac{b^2}{a}\cdot x \\ -(y-b)\cdot\sqrt{a^2-b^2} = b\cdot x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y\sqrt{a^2-b^2} = \frac{b}{a}\left[-(y-b)\sqrt{a^2-b^2}\right] \Rightarrow y = \frac{-b\cdot(y-b)}{a} = -\frac{b\cdot y+b^2}{a} \Rightarrow y\cdot a = -y\cdot b + b^2 \Rightarrow y\cdot a + y\cdot b = b^2 \Rightarrow$$

$$y(a+b) = b^2 \Rightarrow y = \frac{b^2}{a+b}.$$

Deci coordonatele lui Q sunt $\left(\frac{a\cdot c}{a+b}, \frac{b^2}{a+b}\right)$.



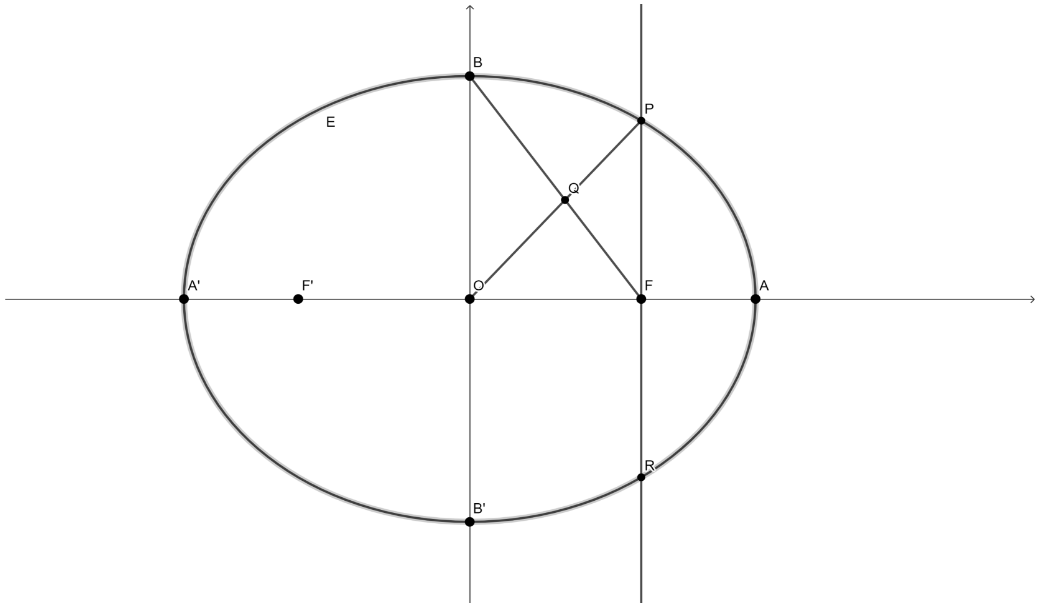
Lungimea segmentului BQ este

$$\|BQ\| = \sqrt{\left(x_Q - x_B\right)^2 + \left(y_Q - y_B\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a-c}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{a+b} - b\right)^2} = \sqrt{\frac{a^4 - a^2 \cdot b^2 \cdot (-a \cdot b)^2}{(a+b)^2}} = \sqrt{\frac{a^4}{(a+b)^2}} = \frac{a^2}{a+b}.$$

Știind $\|OB\| = b$ și $\|BQ\| = \|OB\| \Rightarrow \frac{a^2}{a+b} = b \Rightarrow a^2 = b \cdot (a+b) \Leftrightarrow a^2 = a \cdot b + b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot b}{b^2} + 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{a}{b} \Leftrightarrow$

$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0.$

Cum a, b>0 obținem că $\frac{a}{b}$ este soluția pozitivă a ecuației $x^2 - x - 1 = 0$, însemnând că $\frac{a}{b} = \phi$. Adică, elipsa este de aur.

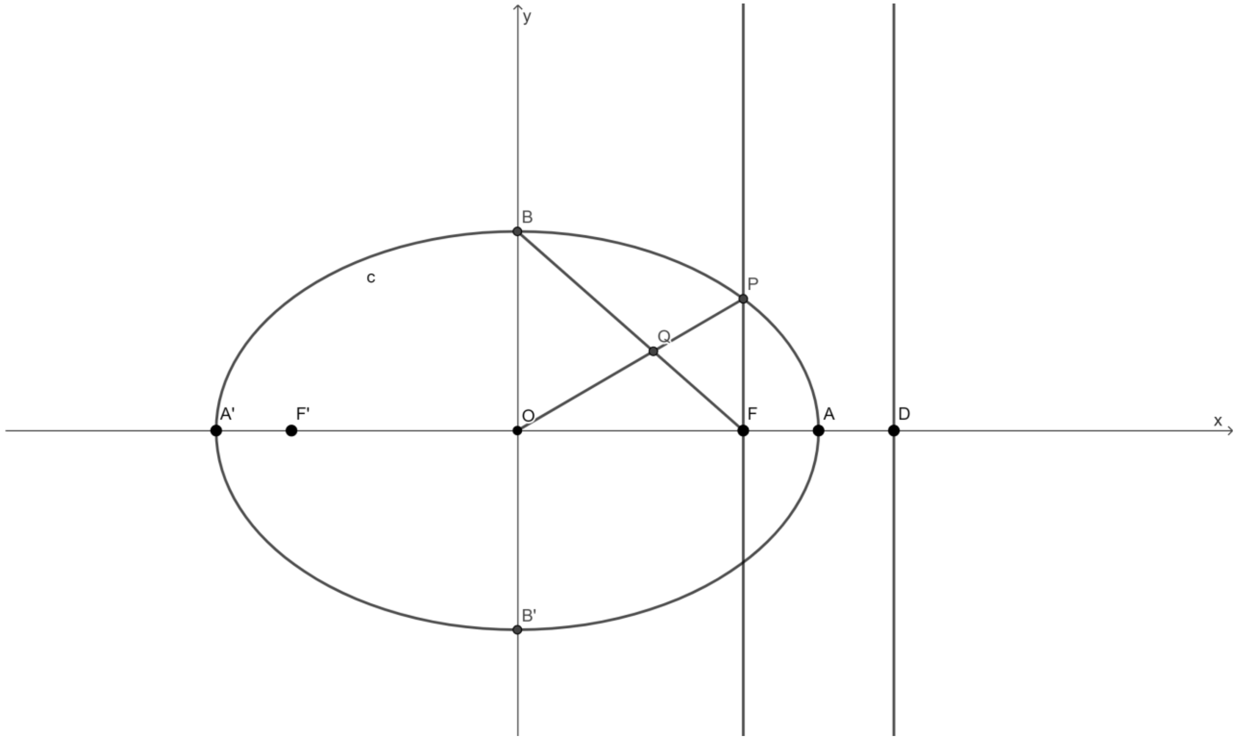


Propoziție: Fie elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ și dreapta directoare (d) prin cadranele I și IV. Fie $\{D\}=d\cap Ox$. Atunci elipsa este de aur dacă și numai dacă $\frac{\|OD\|}{\|OF\|}=\phi$, unde $F(c,0)$ este focarul elipsei, *c>0.*

Demonstrație: “=>” Fie elipsa de aur, deci $\frac{a}{b}=\phi$. Ecuația dreptei directoare este $x=\frac{a^2}{c}$. Cum $c^2=a^2-b^2$ avem

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a^2}{b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}}=b\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\phi^2-1}}=b\cdot\phi^2\cdot\frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

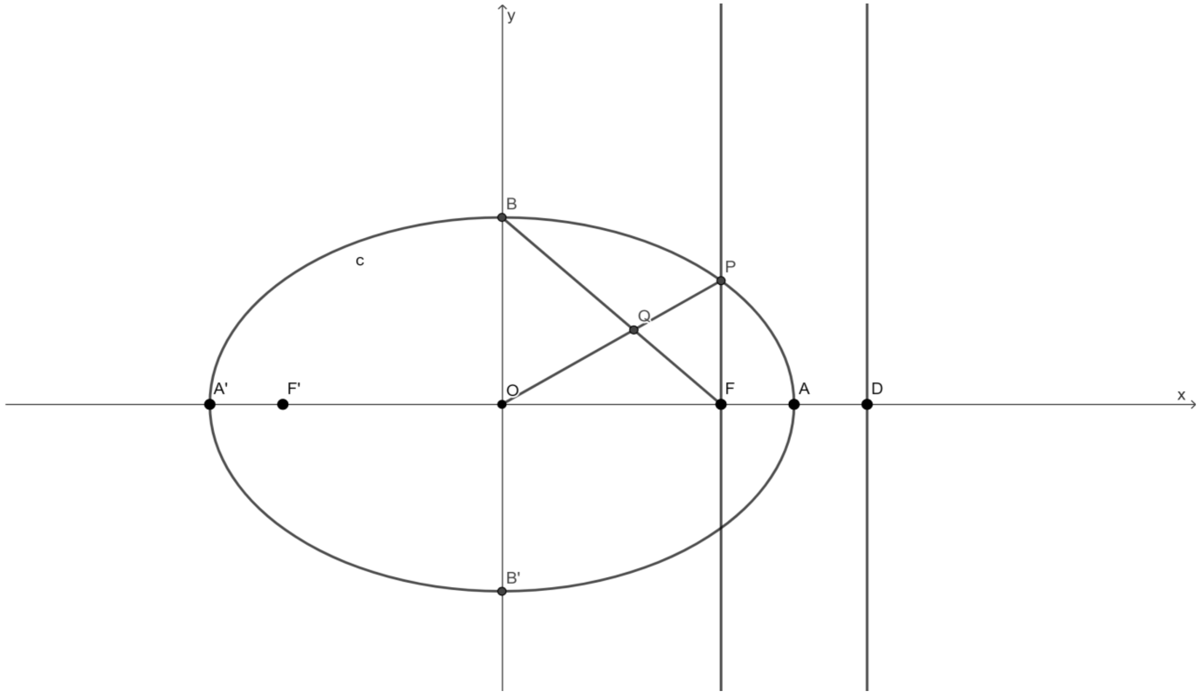
$\Rightarrow$ ecuația dreptei directoare este $x=b\cdot\phi\sqrt{\phi}$.



Observăm că $\frac{\|OB\|}{\|OF\|} = \frac{b\phi\sqrt{\phi}}{b\sqrt{\phi}} = \phi$

și $\frac{\|OF\|}{\|FD\|} = \frac{\|OF\|}{\|OD\| - \|OF\|} = \frac{b\sqrt{\phi}}{b \cdot \phi\sqrt{\phi} - b\sqrt{\phi}} \frac{1}{\phi - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\phi}} = \phi$

deci $\|OF\|$ este secțiunea de aur a lui $\|OD\|$ și $\|FD\|$ este secțiunea de aur a lui $\|OF\|$.

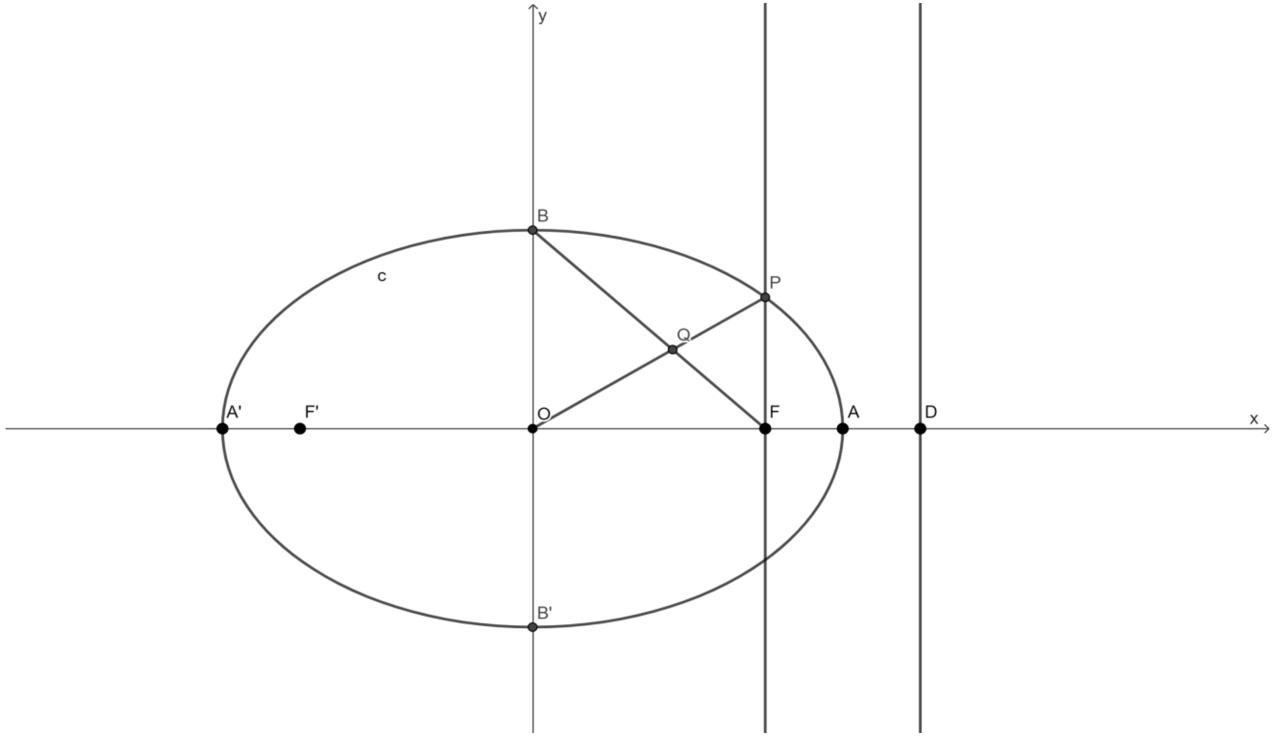


“<=“ Presupunem că elipsa are ecuația $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ și știm că $\|OF\|$ este secțiunea de aur a lui $\|OD\|$. Demonstrăm că elipsa este de aur, adică $\frac{a}{b}=\phi$.

Știm că $\frac{\|OD\|}{\|OF\|}=\phi$. Dar $\frac{\|OD\|}{\|FD\|}=\frac{\|OF\|}{\|OD\|-\|OF\|}=\frac{\|OF\|}{\|OF\|\cdot\left(\frac{\|OD\|}{\|OF\|}-1\right)}=\frac{1}{\phi-1}=\frac{1}{\frac{1}{\phi}}=\phi$. Deci $\frac{\|OD\|}{\|OF\|}=\frac{\|OF\|}{\|FD\|}\Leftrightarrow \|OF\|^2=\|OD\|\cdot\|FD\|$.

Atunci $c^2=\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}\Rightarrow c^4=a^2\cdot b^2\Rightarrow a^2-b^2=a\cdot b\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2-1=\frac{a}{b}$, deci $\frac{a}{b}$ este soluția pozitivă a ecuației

$x^2-x-1=0\Rightarrow\frac{a}{b}=\phi$.



Bibliografie:

- Aldo Scimone, “Ellipse: what else?” The Mathematical Gazette, nr. 99(546), 2015, pages 481-485.
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Sec%C8%9Biunea_de_aur
- https://vasileteodor.ro/articol/numerele-lui-fibonacci-si-proportia-de-aur
- https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Golden_ratio/

VĂ MULȚUMESC!