Sesiunea de Comunicări Matematice Asupra mulțimii punctelor de discontinuitate ale unei funcții

Lungan Andreea-Laura

9 Decembrie 2023

Cuprins

Caracterizarea continuității cu limite de șiruri in $\mathbb{R}$
- Exemplu de funcție continuă în orice punct irațional și discontinuă în orice punct rațional nenul
- Concepte privind spațiile metrice și topologice

Oscilația unei funcții

Caracterizarea mulțimii punctelor de continuitate și discontinuitate a unei funcții
- Un exemplu de funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a cărei mulțimi de puncte de discontinuitate este $\mathbb{Q}$
- Mulțimea punctelor de discontinuitate pentru o anume funcție

Bibliografie

Caracterizarea continuității cu limite de șiruri in $\mathbb{R}$

Definiție: Spunem că o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă într-un punct fixat $x_0 \iff$ oricare ar fi un șir $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ cu $x_n \to x_0$, atunci $f(x_n) \to f(x_0)$, adică există și este finită

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Exemplu de funcție continuă în orice punct irațional și discontinuă în orice punct rațional nenul

PROPOZIȚIA 1: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ sau x=0;} \\ \frac{1}{q}, & \text{dacă } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ și } q \in \mathbb{N} \text{ astfel încât (p,q)=1.} \end{cases}$$

Atunci f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și discontinuă pe $\mathbb{Q}^*$.

Exemplu de funcție continuă în orice punct irațional și discontinuă în orice punct rațional nenul

PROPOZIȚIA 1: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ sau x=0;} \\ \frac{1}{q}, & \text{dacă } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ și } q \in \mathbb{N} \text{ astfel încât (p,q)=1.} \end{cases}$$

Atunci f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și discontinuă pe $\mathbb{Q}^*$.
Demonstrație:
Observație: Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent la x, unde $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ cu $p_n \in \mathbb{Z}$ și $q_n \in \mathbb{N}$ astfel încât (p_n, q_n)=1 și $x_n \neq x$, pentru orice n $\in \mathbb{N}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty.$$

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci $f(x) = 0$.
Dacă $x_n = \frac{p_n}{q_n}, p_n \in \mathbb{Z}$ și $q_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(p_n, q_n) = 1$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x).$$

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci $f(x) = 0$.
Dacă $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{Z}$ și $q_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(p_n, q_n) = 1$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x).$$

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ rezultă că $f(x_n) = 0 \to 0 = f(x)$.
Deci f continuă în orice x număr irațional.

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci $f(x) = 0$.
Dacă $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{Z}$ și $q_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(p_n, q_n) = 1$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x).$$

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ rezultă că $f(x_n) = 0 \to 0 = f(x)$.
Deci f continuă în orice x număr irațional.
Fie $x = 0$ și considerăm $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât $x_n \to 0$.
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ rezultă că $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{Z}$ și $q_n \in \mathbb{N}$ astfel încât (p,q)=1 și $\frac{p_n}{q_n} \to 0$ atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(0)$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ rezultă că $f(x_n) = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$.
Deci f este continuă în x=0.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ rezultă că $f(x_n) = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$.
Deci f este continuă în x=0.
Fie $x \neq 0$ și $x = \frac{p}{q}$, (p,q)=1.
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $x_n \to x$, atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(0)$.
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ a.î. $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ și $x_n \to x$, atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 \neq f(0)$.
Așadar, f este discontinuă în orice număr rațional nenul.

Concepte privind spațiile metrice și topologice

- **Definiție:** Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ spații metrice. Fie A o submulțime nevidă a lui X și o funcție $f : A \to Y$. Fie $x_0 \in A$. Spunem că f este continuă în x_0 dacă și numai dacă oricare ar fi $\epsilon > 0$ și $x \in A$, există $\delta_\epsilon > 0$ astfel încât $d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ pentru orice $x \in A$ astfel încât $d_1(x, x_0) < \delta_\epsilon$.

Concepte privind spațiile metrice și topologice

- **Definiție:** Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ spații metrice. Fie A o submulțime nevidă a lui X și o funcție $f : A \to Y$. Fie $x_0 \in A$. Spunem că f este continuă în x_0 dacă și numai dacă oricare ar fi $\epsilon > 0$ și $x \in A$, există $\delta_\epsilon > 0$ astfel încât $d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ pentru orice $x \in A$ astfel încât $d_1(x, x_0) < \delta_\epsilon$.
- Fie $x_0 \in X$, unde (X,d) spațiu metric și fie $r > 0$. Atunci definim bila deschisă de centru x_0 și rază r astfel:

$$B(x_0, r) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < r\}.$$

- Spunem că x este un punct interior lui A dacă și numai dacă exista $r > 0$ astfel încât $B(x, r) \subseteq A$.
- O mulțime se numește deschisă dacă orice punct al său este punct interior.

- Spunem că x este un punct interior lui A dacă și numai dacă exista $r > 0$ astfel încât $B(x, r) \subseteq A$.
- O mulțime se numește deschisă dacă orice punct al său este punct interior.
- O mulțime se numește închisă dacă complementara sa este o mulțime deschisă.
- Spunem că x este punct aderent pentru A, adica $x \in \bar{A}$, dacă și numai dacă $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

- Clasa tuturor mulțimilor deschise dintr-un spațiu metric se numește topologie , fiind închisă la intersecția finită și reuniunea unei familii arbitrare de mulțimi deschise.
- Frontiera lui A este: $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

- Clasa tuturor mulțimilor deschise dintr-un spațiu metric se numește topologie , fiind închisă la intersecția finită și reuniunea unei familii arbitrare de mulțimi deschise.
- Frontiera lui A este: $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.
- Diametrul lui A este: $diamA = sup\{d(x,y) \mid x \in A, y \in A, x \neq y\}$.

Oscilația unei funcții

- **Definiție:** Oscilația unei funcții $f : A \to \mathbb{R}$ în punctul $x \in \bar{A}$ este:

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} [sup\{|f(z) - f(u)| : z, u \in A, |z - x| < \delta, |u - x| < \delta\}].$$

Oscilația unei funcții

- **Definiție:** Oscilația unei funcții $f : A \to \mathbb{R}$ în punctul $x \in \bar{A}$ este:

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} [sup\{|f(z) - f(u)| : z, u \in A, |z - x| < \delta, |u - x| < \delta\}].$$

- **Consecință:**

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} o_f(x, \delta) = \lim_{\delta \to 0_+} diam(f(A \cap B(x, \delta)))$$

Continuitatea unei funcții folosind scilația

PROPOZIȚIA 2: Fie $f : A \to Y$, $\emptyset \neq A \subset X$.
Atunci f este continuă în $x_0 \in A \iff o_f(x_0)=0$.

Demonstrație:
Fie d_1 metrica pe X și d_2 metrica pe Y.
$" \Rightarrow "$ Presupunem că f este continuă în $x_0 \in A$.
Atunci, pentru $\epsilon > 0$ fixat, există $\delta > 0$ astfel încât

$$f(x) \in B(f(x_0), \frac{\epsilon}{2}),$$

pentru orice $x \in B(x_0, \delta) \cap A$.

Fie $y \in B(x_0, \delta) \cap A \Rightarrow f(y) \in B(f(x_0), \frac{\epsilon}{2})$
$\Rightarrow d_2(f(y), f(x_0)) \leq \frac{\epsilon}{2}$.
$\Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_0)) + d_2(f(x_0), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
$\Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$, pentru oricare x și y din $B(x_0, \delta) \cap A$.
Deci $0 \leq sup d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ pentru oricare x și y $\in B(x_0, \delta) \cap A$.
Când $\epsilon \to 0$,

$$diam(f(A \cap B(x, \delta)) = 0 \Rightarrow o_f(x_0) = 0.$$

" $\Leftarrow$ " Presupunem că $o_f(x_0)=0 \Rightarrow$ pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât

$$0 < \delta < \delta_\epsilon \iff diam(f(A \cap B(x_0, \delta))) < \epsilon.$$

Așadar având $d_1(x, x_0) < \delta$,

$$\Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) \leq diam(f(A \cap B(x_0, \delta))) < \epsilon.$$

$\Rightarrow f$ continuă in $x_0 \in A$.

Caracterizarea unei mulțimi închise prin intermediul oscilației

PROPOZIȚIA 3: Considerăm funcția $f : A \to Y$, $\emptyset \neq A \subset X$ și pentru $x \in \bar{A}$, fie $o_f(x)$ oscilația lui f în x definită anterior. Atunci, pentru orice $\epsilon > 0$, mulțimea

$$\{\, x \in \bar{A} \mid o_f(x) \geq \epsilon \,\}$$

e închisă în X.

Caracterizarea unei mulțimi închise prin intermediul oscilației

PROPOZIȚIA 3: Considerăm funcția $f : A \to Y$, $\emptyset \neq A \subset X$ și pentru $x \in \bar{A}$, fie $o_f(x)$ oscilația lui f în x definită anterior.
Atunci, pentru orice $\epsilon > 0$, mulțimea

$$\{ x \in \bar{A} \mid o_f(x) \geq \epsilon \}$$

e închisă în X.
Demonstrație:
Fie

$$B = \{ x \in \bar{A} \mid o_f(x) \geq \epsilon \}$$

Fie $(x_n)_{n\geq1} \subset B$ care converge la x_0.
Avem B $\subset \bar{A}$, deci pentru orice $x \in \bar{A}$, $o_f(x_0)$ este bine definită.

B este o mulțime închisă $\iff B = \bar{B}$.
Fie așadar $x_0 \in \bar{B} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_n \to x_0 \Rightarrow \forall \delta > 0, \exists n_\delta \in \mathbb{N}$ astfel încât $d_1(x_n, x_0) < \delta, \forall n \geq n_\delta$.
$\Longrightarrow x_n \in B(x_0, \delta)$, oricare ar fi $n \geq n_\delta$.

B este o mulțime închisă $\iff B = \bar{B}$.
Fie așadar $x_0 \in \bar{B} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_n \to x_0 \Rightarrow \forall \delta > 0, \exists n_\delta \in \mathbb{N}$ astfel încât $d_1(x_n, x_0) < \delta, \forall n \geq n_\delta$.
$\implies x_n \in B(x_0, \delta)$, oricare ar fi $n \geq n_\delta$.
Vrem să demonstrăm că $B(x_n, \delta/2) \subset B(x_0, \delta)$.
Fie $a \in B(x_n, \delta/2) \implies d(x_n, a) < \delta/2$.

Cum $x_n \longrightarrow x_0 \Longrightarrow \forall n \geq n_\delta,\ d(x_n, x_0) < \delta/2.$

Cum $x_n \longrightarrow x_0 \Longrightarrow \forall n \geq n_\delta,\ d(x_n, x_0) < \delta/2$.
Atunci $d(x_0, a) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, a) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$.
Cum $d(x_0, a) < \delta \Longrightarrow a \in B(x_0, \delta)$.
Asadar, pentru orice $\delta > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $B(x_n, \delta/2) \subset B(x_0, \delta)$.

$$\Rightarrow diam(f(A \cap B(x_0, \delta))) \geq diam(f(A \cap B(x_n, \delta/2))) \geq o_f(x_n) \geq \epsilon$$

Cum $x_n \longrightarrow x_0 \Longrightarrow \forall n \geq n_\delta,\ d(x_n, x_0) < \delta/2$.
Atunci $d(x_0, a) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, a) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$.
Cum $d(x_0, a) < \delta \Longrightarrow a \in B(x_0, \delta)$.
Asadar, pentru orice $\delta > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $B(x_n, \delta/2) \subset B(x_0, \delta)$.

$\Rightarrow diam(f(A \cap B(x_0, \delta))) \geq diam(f(A \cap B(x_n, \delta/2))) \geq o_f(x_n) \geq \epsilon$

$$\Rightarrow o_f(x_0) \geq \epsilon \Rightarrow x_0 \in B \Longrightarrow \bar{B} \subset B$$

Deci $\bar{B} = B \Longrightarrow B$ este mulţime închisă.

Caracterizarea mulțimii punctelor de continuitate și discontinuitate a unei funcții

PROPOZIȚIA 4:
Fie $f : X \to Y$ o funcție. Atunci mulțimea punctelor de continuitatea a funcției se scrie ca o intersecție numarăbilă de mulțimi deschise în (X, d_1) , iar mulțimea punctelor de discontinuitate a lui f se scrie ca o reuniune numarabilă de mulțimi închise în (X, d_1).

Caracterizarea mulțimii punctelor de continuitate și discontinuitate a unei funcții

PROPOZIȚIA 4:
Fie $f : X \to Y$ o funcție. Atunci mulțimea punctelor de continuitatea a funcției se scrie ca o intersecție numarăbilă de mulțimi deschise în (X, d_1) , iar mulțimea punctelor de discontinuitate a lui f se scrie ca o reuniune numarabilă de mulțimi închise în (X, d_1).
Demonstrație:
Conform propoziției 2, mulțimea C a punctelor de continuitate a funcției f este aceeași cu mulțimea în care oscilația dispare.
$C = \{x \in X \mid \text{f continuă în x}\} = \{x \in X \mid o_f(x) = 0\}$
Fie $B_n = \{\, x \in X \mid o_f(x) < \frac{1}{n} \,\}$

Din propoziția 3 deducem că B_n sunt mulțimi deschise în X.
Avem C=$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ este mulțimea punctelor de continuitate a lui f, deoarece:
Fie $x \in C$, rezultă că f continuă în x, adică $o_f(x) = 0 < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Reciproc, fie $x \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Deci $o_f(x) = 0 < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Când $n \to 0, o_f(x) = 0$, deci x este punct de continuitate pentru f, adică $x \in C$.

Din propoziția 3 deducem că B_n sunt mulțimi deschise în X.
Avem C=$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ este mulțimea punctelor de continuitate a lui f, deoarece:
Fie $x \in C$, rezultă că f continuă în x, adică $o_f(x) = 0 < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Reciproc, fie $x \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Deci $o_f(x) = 0 < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Când $n \to 0, o_f(x) = 0$, deci x este punct de continuitate pentru f, adică $x \in C$.
Atunci, X $\setminus$ C este mulțimea punctelor de discontinuitate a lui f:
$X \setminus C = X \setminus (\bigcap_{n\geq 1} B_n) = \bigcup_{n\geq 1}(X \setminus B_n)$.

Un exemplu de funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a cărei mulțimi de puncte de discontinuitate este $\mathbb{Q}$ este:

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{dacă x=0;} \\ \frac{1}{q}, & \text{dacă } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ și } q \in \mathbb{N} \text{ astfel încât (p,q)=1.} \end{cases}$$

Un exemplu de funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a cărei mulțimi de puncte de discontinuitate este $\mathbb{Q}$ este:

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{dacă x=0;} \\ \frac{1}{q}, & \text{dacă } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ și } q \in \mathbb{N} \text{ astfel încât (p,q)=1.} \end{cases}$$

Din propoziția 1 avem că f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și în $x = 0$ și discontinuă pe $\mathbb{Q}^*$.

Dacă x=0, atunci f(0)=1.
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a.î. $x_n \to 0$ rezultă că $f(x_n) = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(0)$.

Dacă x=0, atunci f(0)=1.
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $x_n \to 0$ rezultă că $f(x_n) = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(0)$.
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ a.î. $x_n \to 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 \neq f(0)$.

Dacă x=0, atunci f(0)=1.
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a.î. $x_n \to 0$ rezultă că $f(x_n) = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(0)$.
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ a.î. $x_n \to 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 \neq f(0)$.
Deci $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $x_n \to 0$, atunci $f(x_n) \to 0 \neq f(0)$.
Așadar f este discontinuă în 0, deci pe tot $\mathbb{Q}$.

Mulțimea punctelor de discontinuitate pentru o anume funcție

PROPOZIȚIA 5: Pentru orice mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ care se scrie ca o reuniune numărabilă de mulțimi închise, există o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât A să fie mulțimea punctelor de discontinuitate pentru f.

Mulțimea punctelor de discontinuitate pentru o anume funcție

PROPOZIȚIA 5: Pentru orice mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ care se scrie ca o reuniune numărabilă de mulțimi închise, există o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât A să fie mulțimea punctelor de discontinuitate pentru f.
Demonstrație: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ a.î.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

unde F_n sunt mulțimi închise pentru orice n ≥ 1.
Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $F_n \subset F_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Într-adevar, putem înlocui F_n cu $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$.

Dacă A$= \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) =$
$\begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ este discontinuă pentru orice x $\in \mathbb{R}$.
Dacă $A \neq \mathbb{R}$, atunci considerăm functia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{n \in K} \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } x \in A; \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus A; \end{cases}$$

unde $K = \{ x \mid x \in F_n \}$.

Dacă A= $\mathbb{R} \Longrightarrow f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ este discontinuă pentru orice x $\in \mathbb{R}$.

Dacă $A \neq \mathbb{R}$, atunci considerăm functia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{n \in K} \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } x \in A; \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus A; \end{cases}$$

unde $K = \{ x \mid x \in F_n \}$.

Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)(\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \frac{1}{2})$

Deci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} g(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{Q}; \\ -\frac{1}{2} g(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

Mai întâi demonstrăm că orice punct din A este un punct de discontinuitate pentru f.
Într-adevar, dacă $x \in \mathring{A} \subset A$, atunci $f(x) \neq 0$ și orice vecinătate a lui x va conține un punct y în care semnul lui f este diferit de semnul lui f(x).

Mai întâi demonstrăm că orice punct din A este un punct de discontinuitate pentru f.
Într-adevar, dacă $x \in \mathring{A} \subset A$, atunci $f(x) \neq 0$ și orice vecinătate a lui x va conține un punct y în care semnul lui f este diferit de semnul lui f(x).
Dacă $x \in \partial A \cap A \Longrightarrow f(x) \neq 0$ și fiecare vecinătate a lui x conține un punct y în care f se anulează, adică f(y)=0.
Cum $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A) \Longrightarrow$ f este discontinuă pe A.

Acum trebuie sa demonstrăm ca f este continuă în $\mathbb{R} \setminus A$.
Fie $x \in \mathbb{R} \setminus A \Longrightarrow f(x) = 0$.
Dacă un șir $(x_k)_{k \geq 1}$ converge la x și $x_k \in A \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_k \notin F_n$ pentru $k \geq k_n$, deoarece dacă ar exista un număr infinit de x_k în unele mulțimi F_n, atunci x ar fi și el în F_n.

Acum trebuie sa demonstrăm ca f este continuă în $\mathbb{R} \setminus A$.
Fie $x \in \mathbb{R} \setminus A \Longrightarrow f(x) = 0$.
Dacă un șir $(x_k)_{k\geq 1}$ converge la x și $x_k \in A \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_k \notin F_n$ pentru $k \geq k_n$, deoarece dacă ar exista un număr infinit de x_k în unele mulțimi F_n, atunci x ar fi și el în F_n.
Asadar, pentru $k \geq k_n$,
$g(x_k) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - (1 + ... + \frac{1}{2^n}) =$
$1 - (1 - (\frac{1}{2^n})) = \frac{1}{2^n}$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} g(x_k) = 0 = g(x).$$

Așadar f este continuă în $\mathbb{R} \setminus A$.

Bibliografie

1. W.J.Kaczor, M.T.Nowak, Problems in Mathematical Analysis II Continuity and Differantion Volum 2, American Mathematical Society, 2001
2. D.Popa, Analiza matematica, Constanța, 1996
3. S.S Kim, American Mathematical Society, 1999

Vă mulțumesc pentru atenție!