Caractere de grupuri

Ioniță Cristina-Aurora

Universitatea ”Ovidius”-Constanța

Facultatea de Matematică și Informatică

Anul 2

Profesor îndrumător: Lect. Univ. Dr. Iorgulescu Florin

Introducere (Reprezentare liniară și Reprezentare matricială)

Definiţie: Fie G un grup , K un corp comutativ şi V un K-spaţiu vectorial.Se numeşte reprezatare liniară a lui G în V un morfism de grupuri $\rho : G \longrightarrow GL_K(V)$.V se numeşte spaţiul reprezentării,iar în cazul când $dim_K(V)$ este finită , $dim_K(V)$ se numeşte gradul reprezentării. Prin K-reprezentare liniară vom înţelege o reprezentare liniară a lui G într-un anumit K-spaţiu vectorial.

Definiţie: Se numeşte K-reprezentare matricială, de grad n al corpului G, un morfism de grupuri $R : G \longrightarrow GL_n(K)$.

Definiţie:

Fie $\rho : G \longrightarrow GL_K(V)$ şi $\rho' : G \longrightarrow GL_K(V')$ două K-reprezentări liniare ale grupului G. Spunem că ρ si ρ' sunt izomorfe (scriem $\rho \simeq \rho'$) dacă există un izomorfism $u : V \longrightarrow V'$ de spaţii vectoriale,astfel încât , $\forall s \in G \Longrightarrow \rho'(s) \cdot u = u \cdot \rho(s)$.

Definiţie:

Două K-reprezentări matriciale $R : G \longrightarrow GL_n(K)$ şi $R' : G \longrightarrow GL_{n'}(K)$ ale grupului G sunt izomorfe (se scrie $R \simeq R'$) , dacă n=n' şi $\exists T \in GL_n(K)$ astfel încât, $\forall s \in G \Longrightarrow R'(s) = T \cdot R(s) \cdot T^{-1}$.

Propoziţie:

Fie $\rho : G \longrightarrow GL_K(V)$ şi $\rho' : G \longrightarrow GL_K(V')$ două K-reprezentări liniare de grad finit ale lui G izomorfe , B o bază în V şi B' o bază în V'.Atunci reprezentările matriciale asociate lui ρ si ρ' în bazele B şi respectiv B' sunt izomorfe.

Exemple de reprezentări:

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ${}_K V$ cu $dim_K(V) = n$ şi B$=(e_1, ...e_n)$ o bază a lui V.Pentru fiecare $\sigma \in S_n$ considerăm aplicaţia $\rho_n(\sigma)$ a lui V care permută baza B:

$$\rho_n(\sigma)(e_i) = e_{S(i)}, \forall 1 \leq i \leq n.$$

ρ_n este o K-reprezentare a lui G,ρ_n se numeşte reprezentarea ”permutare” a lui S_n în V.Dacă R_n este reprezentarea matricială lui ρ_n în baza B,atunci este clar că $\forall s \in G$ matricea $R_n(s)$ are proprietatea că pe fiecare linie şi pe fiecare coloană a ei,$\exists$ un singur element nenul şi acest element este 1. De exemplu, dacă n=3 ,atunci R_3 este dat explicit astfel:

$$R_3((1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; R_3((2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; R_3((1,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$R_3((1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; R_3((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; R_3((1,3,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Caracter de grup

Definiţie: Fie $\rho : G \longrightarrow GL_K(V)$ o reprezenatare liniară de grad finit a lui G.Se numeşte caracter a lui ρ funcţia compusă $\chi_\rho = Tr \circ \rho$

$\chi_\rho : G \xrightarrow{\rho} GL_K(V) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} K$, i.e χ_ρ=Tr(ρ(a)), $\forall\, a \in G$.

Prin caracter al lui G(peste K) vom înţelege orice funcţie φ: $G \longrightarrow K$ pentru care $\exists$ o K-reprezentare liniară de grad ρ a lui G astfel încât φ= χ_ρ .

Prin caracter ireductibil al lui G,vom înţelege $\forall$ caracter al unei K-reprezentări ireductibile de grad finit a lui G.

Definiţie: O K-funcţie centrală pe grupul G este orice funcţie $\gamma : G \longrightarrow K$ cu proprietatea că : $\gamma(s \cdot t)$=$\gamma(t \cdot s)$,$\forall\ s, t \in G$.

$s, t \in G$ sunt conjugate dacă $\exists\ a \in G$ astfel încât t=$asa^{-1} \Rightarrow s \sim t$.Relaţia ”~” este o relaţie de echivalenţă pe G,iar clasele de echivalenţă modulo ”~” se numesc clase de conjugare. Aşadar,dacă $s \in G$,atunci clasa de conjugare C_s a lui s este:

$$C_s = \{asa^{-1} | a \in G\}$$

Notăm Cf_K(G) mulţimea K-funcţiilor centrale pe G.În raport cu operaţiile uzuale de adunare ,înmulţire şi înmulţire cu scalari $\rightarrow Cf_K$(G) este o K-algebră comutativă.

Propoziţia 1:

Fie $\rho : G \longrightarrow GL_K(V)$ o reprezentare liniară a lui G,de grad finit.Au loc următoarele afirmaţii:

1) $\chi_\rho \in Cf_K(G)$;

2) χ_ρ(e)= dim_K(V);

3)Dacă $\rho' \in Repr_K(G)$ si $\rho \simeq \rho'$,atunci χ_ρ=$\chi_{\rho'}$;

4) Dacă G este un grup finit , atunci:

$$\chi_{reg}(s) = \begin{cases} |G|, & \text{pentru } s = e \\ 0, & \text{pentru } s \neq e. \end{cases}$$

Corolar 1:

Dacă G este un grup finit şi $Char(K) \nmid |G|$,atunci orice caracter al lui G este o sumă finită de caractere ireductibile ale lui G.

Lema l (Lema lui Schur):

Fie ρ_1:$G \longrightarrow GL_K(V_1)$ şi ρ_2:$G \longrightarrow GL_K(V_2)$ două K-reprezentări liniare ireductibile ale lui G şi ρ_2:$G \longrightarrow \rho_1$, un morfism de reprezentări. Au loc următoarele afirmaţii:

(1) f este fie morfismul nul, fie un izomorfism;

(1)' $\rho_1 \not\simeq \rho_2 \Longrightarrow f$ =0.

(2)Dacă $V_1 = V2$, $\rho_1 = \rho2$, K este algebric închis $dim_K(V_1)$ este finită, atunci $\exists$ $\lambda \in K$ astfel încat f=$\lambda \cdot l_{V_1}$, i.e f este o omotetie.

Propoziţia 2:

Fie $\rho 1$ si $\rho 2$ două K-reprezentări ireductibile ale lui G şi χ_1=χ_{ρ_1} , χ_2=χ_{ρ_2} .Daca K este algebric închis şi $Char(K) \nmid |G|$,atunci:

1) $\rho_1 \simeq \rho 2 \Leftrightarrow < \chi_1, \chi_2 >$=1;

2) $\rho_1 \not\simeq \rho 2 \Leftrightarrow < \chi_1, \chi_2 >$=0.

Teorema 1:

Mulţimea $\{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k\}$ a tuturor caracterelor ireductibile peste K ale grupului G constituie o bază ortonormală a K-spaţiului vectorial $Cf_K(G)$ al K-funcţiilor centrale pe G,deci în particular $dim_K(Cf_k(G))$ care este numărul tuturor claselor de conjugate ale lui G coincide cu numărul tuturor tipurilor de K-reprezentări ireductibile ale lui G.

Corolar 2:

Fie un G un grup finit. Atunci G este un grup abelian $\Leftrightarrow$ orice caracter ireductibil al lui G peste un corp algebric închis K de caracteristică nulă este de gradul 1.

Lema 2: Fie G un grup oarecare având proprietatea ca fiecare clasă a sa de conjugare este o mulţime finită şi A,inel comutativ.Atunci centrul Z(A[G]) al inelului grupal A[G] este un A-modul liber ,având o bază formată din $e_C = \sum_{s \in C} 1 \cdot s$ unde C parcurge toate clasele de conjugare ale lui G.

Lema 3:

Fie $\rho : G \rightarrow GL_K(W)$ o K-reprezentare liniară ireductibilă ordinară a lui G, de grad d şi având caracterul χ.Atunci,pentru orice clasă de conjugare C al lui G, elementul $\frac{1}{d}\sum_{s\in C}\chi(s) \in K$ este întreg peste $\mathbb{Z}$.

Teorema 2:

Gradul oricărei K-reprezentări liniare ireductibile ordinare a grupului G, în cazul Char(K)=0,este un divizor al lui $|G|$.

Exerciţiu: Să se determine caracterul pentru reprezentarea permutare,pentru cazul n=3.

Fie

$\rho_n : S_n \longrightarrow GL_K(V)\ \sigma \mapsto \rho_n(\sigma)$ reprezentare permutare $\Longrightarrow \rho_n$ este reprezentare liniară.

Caracterul lui ρ_n este funcţia compusă $\chi_{\rho_n} = Tr \circ \rho_n \Longrightarrow \chi_{\rho_n} = Tr(\rho_n(\sigma)), \forall \sigma \in S_n$.

$\rho_n(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)} \Longrightarrow \chi_{\rho_n} = Tr(\rho_n(\sigma)(e_i) = Tr(e_{\sigma(i)})\ , \forall 1 \leq i \leq n.$

Pentru n=3, avem $\rho_3 : S_3 \longrightarrow GL_K(K^3) \Longrightarrow \chi_{\rho_3} = Tr(e_{\sigma(i)})\ , \forall 1 \leq i \leq 3.$

Se vor calcula toate Tr-urile (urmele) reprezentărilor matriciale prezentate la început:
$Tr(R_3((1))) = 1 + 1 + 1 = 3$
$Tr(R_3((2,3))) = 1 + 0 + 0 = 1$
$Tr(R_3((1,3)) = 0 + 1 + 0 = 1$
$Tr(R_3((1,2))) = 0 + 0 + 1 = 1$
$Tr(R3((1,2,3))) = 0 + 0 + 0 = 0$
$Tr(R_3((1,3,2))) = 0 + 0 + 0 = 0. \Longrightarrow \chi_{\rho_3} = \{0, 1, 3\}.$

Bibliografie

- “19 Lecții de teoria grupurilor”–Toma Albu și Nicolae Manolache;
- https://ro.frwiki.wiki/wiki/Lemme_de_Schur;
- “Abstract Algebra”-David S. Dummit și Richard M. Foote;
- “Algebra: Chapter 0”- Paolo Aluffi;
- “Grupuri și subgrupuri”-Gheorghe Micula.