O metodă de evaluare a sumei seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ și aplicații

Ionescu Andreea

Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Ovidius din Constanța

9 Decembrie 2023

Cuprins

Convergența șirului $\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Din definiția convergenței seriilor avem că $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă $\Leftrightarrow a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ este convergent.

<u>Metoda I: Folosind teorema lui Weierstrass:</u>
Studiem monotonia și avem $a_n < a_{n+1}$,$\forall\ n \geq 1$,
pentru că $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall\ n \geq 1$,
de unde rezultă că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător. (1)

Metoda I: Folosind teorema lui Weierstrass:

Studiem monotonia și avem $a_n < a_{n+1}$,$\forall\ n \geq 1$,
pentru că $1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall\ n \geq 1$,
de unde rezultă că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător. (1)
Studiem mărginirea și avem
$a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)n}$
$= 1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = 2-\frac{1}{n} < 2$, $\forall\ n \geq 1$,
$\Rightarrow$ șirul a_n este mărginit superior. (2)

Metoda I: Folosind teorema lui Weierstrass:

Studiem monotonia și avem $a_n < a_{n+1}$,$\forall\ n \geq 1$,
pentru că $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall\ n \geq 1$,
de unde rezultă că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător. (1)
Studiem mărginirea și avem
$a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$
$= 1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = 2-\frac{1}{n} < 2$, $\forall\ n \geq 1$,
$\Rightarrow$ șirul a_n este mărginit superior. (2)
Din (1) și (2), obținem ca șirul este convergent.

Metoda II: Vom demonstra că șirul este Cauchy:

Fie $\epsilon > 0$, oarecare. Trebuie să demostrăm că $\exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât avem $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_\epsilon,\ p \in \mathbb{N}$.

Metoda II: Vom demonstra că șirul este Cauchy:

Fie $\epsilon > 0$, oarecare. Trebuie să demoström că $\exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât avem $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_\epsilon,\ p \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},\ \forall\ \text{p} \in \mathbb{N}.$$

Metoda II: Vom demonstra că șirul este Cauchy:

Fie $\epsilon > 0$, oarecare. Trebuie să demostrăm că $\exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât avem $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_\epsilon,\ p \in \mathbb{N}$.

Atunci

$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$, $\forall$ p $\in \mathbb{N}$.

Cum $\frac{1}{n} \to 0$,

$\Rightarrow \exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{n} < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_\epsilon$.

Metoda II: Vom demonstra că șirul este Cauchy:

Fie $\epsilon > 0$, oarecare. Trebuie să demostrăm că $\exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât avem $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_\epsilon,\ p \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},\ \forall\ \mathrm{p} \in \mathbb{N}.$$

Cum $\frac{1}{n} \to 0$,

$\Rightarrow \exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{n} < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_\epsilon$.

Deducem așadar că $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, $\forall$ n $\geq n_\epsilon$, $\forall$ p $\in \mathbb{N}$ i.e. șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir Cauchy de numere reale.

Metoda II: Vom demonstra că șirul este Cauchy:

Fie $\epsilon > 0$, oarecare. Trebuie să demostrăm că $\exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât avem $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_\epsilon,\ p \in \mathbb{N}$.

Atunci

$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$, $\forall$ p $\in \mathbb{N}$.

Cum $\frac{1}{n} \to 0$,

$\Rightarrow \exists\ n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{n} < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_\epsilon$.

Deducem așadar că $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$, $\forall$ n $\geq n_\epsilon$, $\forall$ p $\in \mathbb{N}$ i.e. șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir Cauchy de numere reale.

$\Rightarrow$ *sirul*$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Demonstrăm că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demonstrăm că $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
Vom cosidera integrala definită:
$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt$, $\forall$ n $\in\mathbb{N}$.
O vom evalua aplicând integrarea prin părți de două ori, în două moduri diferite.

Astfel,

$$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt$$
$$=t\cos^{2n}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot 2n\cos^{2n-1}t\cdot(-\sin t)\,dt=$$
$$=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\cos^{2n-1}t\sin t\,dt$$
$$=n[t^2\cos^{2n-1}t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2[(2n-1)\cos^{2n-2}t(-\sin t)\cdot\sin t+\cos^{2n-1}t\cos t]\,dt]$$
$$=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2[(2n-1)\cos^{2n-2}t-\cos^{2n}t(2n-1+1)]\,dt$$
$$=n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n-2}t\,dt-2n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,dt.$$

Astfel,

$$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt$$
$$=t\cos^{2n}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot 2n\cos^{2n-1}t\cdot(-\sin t)\,dt=$$
$$=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\cos^{2n-1}t\sin t\,dt$$
$$=n[t^2\cos^{2n-1}t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2[(2n-1)\cos^{2n-2}t(-\sin t)\cdot\sin t+\cos^{2n-1}t\cos t]\,dt]$$
$$=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2[(2n-1)\cos^{2n-2}t-\cos^{2n}t(2n-1+1)]\,dt$$
$$=n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n-2}t\,dt-2n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,dt.$$

Notăm $I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,dt$

Astfel,

$$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt$$
$$=t\cos^{2n}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot 2n\cos^{2n-1}t\cdot(-\sin t)\,dt=$$
$$=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\cos^{2n-1}t\sin t\,dt$$
$$=n[t^2\cos^{2n-1}t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2[(2n-1)\cos^{2n-2}t(-\sin t)\cdot\sin t+\cos^{2n-1}t\cos t]\,dt]$$
$$=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2[(2n-1)\cos^{2n-2}t-\cos^{2n}t(2n-1+1)]\,dt$$
$$=n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n-2}t\,dt-2n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,dt.$$

Notăm $I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,dt$
și avem $J_{2n}=-2n^2I_{2n}+n(2n-1)I_{2n-2}$, $\forall$ n ≥ 1. (1)

Pe de altă parte,

$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}t\cdot(\sin t)`\,dt$

$=cos^{2n-1}t\cdot\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2n-1)\cos^{2n-2}t\cdot(-\sin t)\cdot\sin t\,dt$

$=(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2n-2}t-\cos^{2n}t)\,dt$

$\Rightarrow J_{2n}=(2n-1)J_{2n-2}-(2n-1)J_{2n}$, $\forall$ n ≥ 1

$\Leftrightarrow 2nJ_{2n}=(2n-1)J_{2n-2}$

$\Rightarrow J_{2n}=\frac{2n-1}{2n}J_{2n-2}$, $\forall$ n ≥ 1. (2)

Pe de altă parte,

$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}t\cdot(\sin t)'\,dt$

$=cos^{2n-1}t\cdot\sin t\big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2n-1)\cos^{2n-2}t\cdot(-\sin t)\cdot\sin t\,dt$

$=(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2n-2}t-\cos^{2n}t)\,dt$

$\Rightarrow J_{2n}=(2n-1)J_{2n-2}-(2n-1)J_{2n}$, $\forall$ n ≥ 1

$\Leftrightarrow 2nJ_{2n}=(2n-1)J_{2n-2}$

$\Rightarrow J_{2n}=\frac{2n-1}{2n}J_{2n-2}$, $\forall$ n ≥ 1. (2)

Cum $J_0=\frac{\pi}{2}$, scriem succesiv relația de recurență (2) și obținem

$J_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1}{(2n)(2n-2)\cdot\ldots\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow J_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$. (3)

Din (1) și (3) $\Rightarrow -2n^2 I_{2n} + n(2n-1)I_{2n-2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \forall n \geq 1$
$\Leftrightarrow \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} - \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}I_{2n-2} = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi}{4}$. (4)

Din (1) și (3) $\Rightarrow -2n^2 I_{2n} + n(2n-1)I_{2n-2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, $\forall n \geq 1$
$\Leftrightarrow \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} - \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}I_{2n-2} = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi}{4}$. (4)
Scriem succesiv relația de recurență (4) și adunăm, obținem că,
$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}I_{2k} - \frac{(2k-2)!!}{(2k-3)!!}I_{2k-2}\right) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} - \frac{0!!}{(-1)!!}I_0$
$= -\frac{\pi}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$,
$\Rightarrow \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$,
pentru că $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,dt = \frac{\pi^3}{24}$
$\Leftrightarrow \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$, $\forall\ n \geq 1$. (5)

Acum trebuie să calculăm $lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n}$.

Acum trebuie să calculăm $lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n}$.
Vom folosi faptul că $\frac{2}{\pi}t\leq\sin t$, $\forall\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$
$\Leftrightarrow t\leq\frac{\pi}{2}\sin t$, pentru $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

Acum trebuie să calculăm $lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n}$.

Vom folosi faptul că $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t,\ \forall\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$, pentru $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t\, dt \leq (\frac{\pi}{2})^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \sin^2 t\, dt$

$= \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n} t - \cos^{2n+2} t)\, dt = \frac{\pi^2}{4} (J_{2n} - J_{2n+2})$.

Acum trebuie să calculăm $lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n}$.

Vom folosi faptul că $\frac{2}{\pi}t\leq\sin t,\ \forall\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t\leq\frac{\pi}{2}\sin t$, pentru $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,dt\leq(\frac{\pi}{2})^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\sin^2 t\,dt$

$=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2n}t-\cos^{2n+2}t)\,dt=\frac{\pi^2}{4}(J_{2n}-J_{2n+2})$.

Din (3) $\Rightarrow I_{2n}\leq\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!})$

$=\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2n-1)!!(2n+2-2n-1)}{(2n+2)!!}=\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$

$\Leftrightarrow 0<\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n}\leq\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{1}{2n+2},\ \forall$ n ≥ 1.

Acum trebuie să calculăm $lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n}$.
Vom folosi faptul că $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t,\ \forall\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$
$\Leftrightarrow t\leq\frac{\pi}{2}\sin t$, pentru $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$
$\Rightarrow I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}t\,dt\leq(\frac{\pi}{2})^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\sin^2 t\,dt$
$=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2n}t-\cos^{2n+2}t)\,dt=\frac{\pi^2}{4}(J_{2n}-J_{2n+2})$.
Din (3) $\Rightarrow I_{2n}\leq\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!})$
$=\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2n-1)!!(2n+2-2n-1)}{(2n+2)!!}=\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$
$\Leftrightarrow 0<\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n}\leq\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{1}{2n+2},\ \forall\ \mathrm{n}\geq 1$.
Folosind Criteriul Cleștelui, obținem că $lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n}=0$.

Acum trebuie să calculăm $lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n}$.
Vom folosi faptul că $\frac{2}{\pi}t \le \sin t,\ \forall\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
$\Leftrightarrow t \le \frac{\pi}{2}\sin t$, pentru $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$\Rightarrow I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t\, dt \le (\frac{\pi}{2})^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \sin^2 t\, dt$
$= \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2n} t - \cos^{2n+2} t)\, dt = \frac{\pi^2}{4}(J_{2n} - J_{2n+2})$.
Din (3) $\Rightarrow I_{2n} \le \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!})$
$= \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2n-1)!!(2n+2-2n-1)}{(2n+2)!!} = \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$
$\Leftrightarrow 0 < \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} \le \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{1}{2n+2},\ \forall$ n ≥ 1.
Folosind Criteriul Cleștelui, obținem că $lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} = 0$.
Revenind în (5) $\Rightarrow lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, adică
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Aplicația 1

$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{8}.$$

Aplicația 1

$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{8}.$$

Demonstrație:

Fie $b_n = a_{2n}-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right), n\geq 1.$

Avem $b_n = a_{2n}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4n^2}\right)$
$= a_{2n}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=a_{2n}-\frac{1}{4}a_n, n\geq 1$

Aplicația 1

$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{8}.$

Demonstrație:

Fie $b_n = a_{2n} - \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right), n \geq 1.$

Avem $b_n = a_{2n} - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4n^2}\right)$

$= a_{2n} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) = a_{2n} - \frac{1}{4}a_n, n \geq 1$

și atunci $lim_{n\to\infty} b_n = lim_{n\to\infty}\left(a_{2n}-\frac{1}{4}a_n\right) = \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}.$

Aplicația 1

$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{8}.$

Demonstrație:

Fie $b_n=a_{2n}-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right), n\geq 1.$

Avem $b_n=a_{2n}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4n^2}\right)$

$=a_{2n}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=a_{2n}-\frac{1}{4}a_n, n\geq 1$

și atunci $lim_{n\to\infty}b_n=lim_{n\to\infty}\left(a_{2n}-\frac{1}{4}a_n\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}.$

Observație: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

Aplicația 2

Fiind dat șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, problemele naturale ce se pun sunt:

Aplicația 2

Fiind dat șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, problemele naturale ce se pun sunt:
1. Este finită $lim_{n\to\infty} a_n = l_0$?

Aplicația 2

Fiind dat șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, problemele naturale ce se pun sunt:

1. Este finită $lim_{n\to\infty}a_n=l_0$?
2. În ipoteza 1, a convergenței lui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, apare întrebarea:

Aplicația 2

Fiind dat șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, problemele naturale ce se pun sunt:
1. Este finită $lim_{n\to\infty} a_n = l_0$?
2. În ipoteza 1, a convergenței lui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, apare întrebarea:
Cum converge șirul $(a_n - l_0)_{n\in\mathbb{N}}$ către 0?

Aplicația 2

Fiind dat șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, problemele naturale ce se pun sunt:
1. Este finită $lim_{n\to\infty} a_n = l_0$?
2. În ipoteza 1, a convergenței lui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, apare întrebarea:
Cum converge șirul $(a_n - l_0)_{n\in\mathbb{N}}$ către 0?
i.e. să definim un șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $lim_{n\to\infty} x_n(a_n - l_0) = l_1$ (finit și nenul), pe care o vom numi **evaluare asimptotică de ordin I**.

Ceea ce vom demonstra acum este că
$lim_{n\to\infty} n(\frac{\pi^2}{6}-a_n)=1 \Leftrightarrow lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi^2}{6}-a_n}{\frac{1}{n}}=1 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6}-a_n \sim \frac{1}{n}$.

Ceea ce vom demonstra acum este că

$$lim_{n\to\infty} n(\frac{\pi^2}{6} - a_n) = 1 \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^2}{6} - a_n}{\frac{1}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} - a_n \sim \frac{1}{n}.$$

Soluție:

Vom folosi Lema Stolz-Cesaro, cazul $[\frac{0}{0}]$ și avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^2}{6} - a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^2}{6} - a_{n+1} - \frac{\pi^2}{6} - a_n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{-\frac{1}{n(n+1)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{(n+1)^2}}{-\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Bibliografie

1. W.J.Kaczor, M.T.Nowak, Problems in Mathematical Analysis I - Real Numbers, Sequences and Series, Vol 4, Student Mathematical Library, 2000
2. Gabriel Klambauer, Problems and propositions in analysis, Dekker, 1979
3. Florian Dumitrel, Probleme de analiză matematică - pentru clasa a XI-a, Art Klett, 2013

Vă mulțumesc pentru atenție!