Aplicatii ale mediei Stolarsky

Rares Gurzu

9 Decembrie, 2023

Teorema lui Lagrange

Fie functia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua pe $[a, b]$ si derivabila pe (a, b) Atunci cu siguranta exista $c \in (a, b)$ cu proprietatea ca

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema lui Lagrange

Numarul c este definit in mod unic de a si b prin functia f, pentru f' bijectiva.

$$medie_f(a, b) = c = (f')^{-1}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$$

Exemple relevante

Functia $f(x) = x^2$ intruneste toate conditiile impuse, intrucat $f'(x) = 2x$ si $(f')^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

$$c = medie_f(a,b) = \frac{\frac{b^2-a^2}{b-a}}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

In acest caz, am obtinut chiar **media aritmetica** a numerelor a si b, pe care o vom nota $m_a(a,b)$.

Exemple relevante

Fie $f(x) = \ln x$. In acest caz, $f'(x) = \frac{1}{x}$ si $(f')^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. Atunci avem ca

$$c = medie_f(a, b) = \frac{1}{\frac{\ln b - \ln a}{b-a}} = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

Rezultatul obtinut in acest caz este **media logaritmica** a numerelor a si b, care este utila in domenii precum termodinamica si mecanica. Aceasta se afla intre media aritmetica m_a si media geometrica m_g a doua numere reale pozitive.

Media Stolarsky

Functia $f(x) = x^p, p \in \mathbb{R}^*$ intruneste toate conditiile impuse si in acest caz, avem ca $f'(x) = px^{p-1}$ si $(f')^{-1}(x) = \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, iar $c = medie_f$ se numeste **media Stolarsky**, pe care o vom scrie de acum

$$S_p(a,b) = \left(\frac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Evaluarea mediei Stolarsky pentru anumite valori ale lui p

Pentru $p = -1$, avem ca

$$S_{-1}(a,b) = \left(\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{(-1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{-1-1}} = \left(\frac{\frac{a-b}{ab}}{a-b}\right)^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{ab} = m_g(a,b)$$

Analizarea mediei Stolarsky

Este cunoscut rezultatul care ne spune ca $m_a \geq m_g$, iar in contextul nostru considerat, anume $0 < a < b$, avem inegalitate stricta. In continuare vom analiza monotonia functiei $S_p(a, b) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, unde consideram $0 < a < b$ fixati.

Monotonia functiei $S_p(a, b)$

Pentru studiul monotoniei sale vom analiza semnul derivatei. Dupa mai multe calcule si grupari ai termenilor asemenea, avem ca

$$S_p'(a,b) = \left(\frac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot \left(\frac{p(b-a)\left(\frac{b^p \ln b - a^p \ln a}{p(b-a}\right) - \frac{b^p - a^p}{p^2(b-a)}}{(b^p - a^p)(p-1)} - \frac{\ln\left(\frac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right)}{(p-1)^2} \right)$$

Urmand calculele uzuale , se observa ca $S_p'(a,b) > 0, \forall p \in \mathbb{R}^*$, deci putem trage concluzia ca $S_p(a, b)$ este crescatoare in functie de p.

Proprietati ale **mediei Stolarsky** si analizarea situatiilor "limita"

Fie $l_1 = S_{-\infty}(a,b) = \lim_{p \to -\infty} \left(\frac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ si
$l_2 = S_{\infty}(a,b) = \lim_{p \to \infty} \left(\frac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Atunci avem ca
$\ln l_2 = \ln S_{\infty}(a,b)$.

Calculul limitei superioare a **mediei Stolarsky**

$$\ln(l_2) = \lim_{p\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right)}{p-1} = \lim_{p\to\infty} \frac{\ln(b^p - a^p) - \ln(b-a)}{p-1} - \frac{\ln(p)}{p-1}$$

$$\ln(l_2) = \lim_{p\to\infty} \frac{b^p \ln(b) - a^p \ln(a)}{b^p - a^p} = \lim_{p\to\infty} \frac{b^p}{b^p} \cdot \left(\frac{\ln(b) - \ln(a)\frac{a^p}{b^p}}{1 - \frac{a^p}{b^p}}\right) = \ln(b)$$

Conculzii pentru imaginea lui $S_p(a, b)$

Observam ca $l_2 = b$ si, urmand aceleasi calcule, avem ca $l_1 = a$, cu alte cuvinte avem ca

$$min\{a, b\} = a < S_p(a, b) < b = max\{a, b\}$$

deci $Im(S_p(a, b)) = (a, b)$. Putem confirma acum faptul ca **media Stolarsky** trece prin toate valorile posibile dintre a si b, deci si prin toate mediile posibile ale acestora.

Bibliografie

https://en.wikipedia.org/wiki/Stolarsky$_{m}ean$
https://www.mdpi.com/2227-7390/8/8/1320