Sesiunea de comunicări matematice
Asupra valorilor luate de o funcție continuă

Student : Filip Cristian Dumitru

9 Decembrie 2023

Putem da exemplu de o funcție continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care își atinge fiecare valoare a sa de exact 3 ori? Există o funcție continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care își atinge fiecare valoare a sa de exact 2 ori? Răspunsul este că avem o funcție continuă ce își atinge fiecare valoare a sa de exact 3 ori. Fie funcția g dată de

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } -3 \le x - 1 \\ -x, & \text{dacă } -1 < x \le 1 \\ x-1, & \text{dacă } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

și definim funcția f astfel:

$f(x) = g(x - 6n) + 2n$, $6n - 3 \le x \le 6n + 3, n \in \mathbb{Z}$.

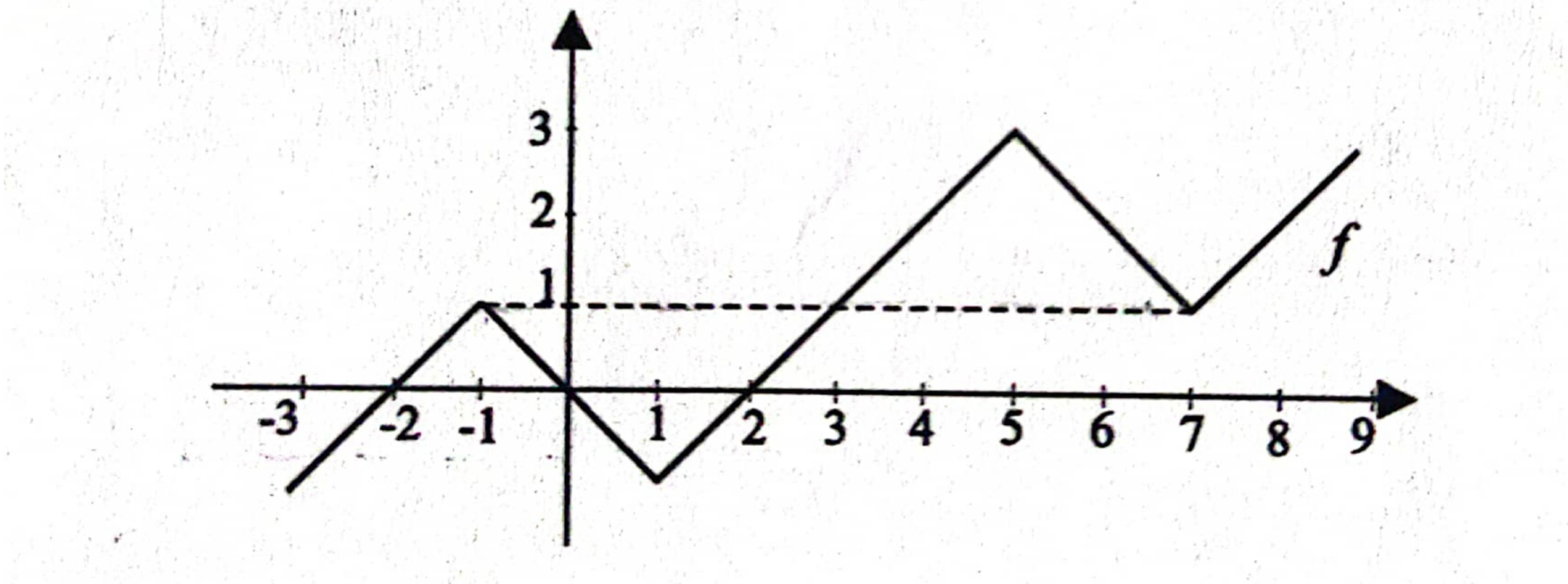

Figure: Funcția f are această proprietate

În al doilea caz , nu va exista o funcție ce își va atinge fiecare valoare a sa de exact 2 ori:
Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să presupunem prin reducere la absurd că f își atinge fiecare valoare a sa de exact 2 ori. Fie b valoare pentru f și fie $x_1 < x_2$ astfel încât f$(x_1) =$ f$(x_2) =$ b. Atunci $f(x) \neq b$ pentru $x \neq x_1, x_2$. Deci , să presupunem , de exemplu, că $f(x) > b, \forall x \in (x_1, x_2)$. Dacă avem $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă , atunci conform Teoremei lui Weierstrass f este mărginită

și își atinge marginile , adică va exista $f(x_0) = \max f = M$ pe intervalul $[x_1, x_2]$. Asta înseamnă că $M = f(x_1)$ sau $M = f(x_2)$. Dar , din ipoteză știm că $f(x) > b = f(x_1) = M$. De unde ne iese că $f(x) > M$. Contradicție , pentru că M era maxim.
Presupunem prin reducere la absurd că $f(u) = f(v) = M, u, v \in (x_1, x_2)$ cu $x_1 < u < v < x_2$. Avem $f(x) \neq M$ pentru $x \in [x_1, x_2] \setminus \{u, v\}$. Rezultă că vom avea $f \neq M$ pe (u, v) , intervalul fiind deschis , deoarece dacă ar fi închis am avea $f(u) = M$ sau $f(v) = M$. Deci $f < M$ pe (u, v).
Fie $m = f(z) = \min f$ pe $[u, v]$, cu $z \in (u, v)$. Vom avea că $m < M$. Dacă am lua un $t > b, t > m, t < M$, atunci graficul va fi tăiat în 4 puncte, adică vor fi 4 puncte în care funcția își va atinge fiecare valoare a sa , ceea ce duce la o contradicție cu presupunerea facută . În consecință, va exista un unic punct k în exteriorul intervalului $[x_1, x_2]$, adică $k \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ astfel încât $f(k) = f(x_0) = M$. Să zicem că $k \in (-\infty, x_1)$, atunci $t \in (b, M)$, și deci f își va atinge fiecare valoare a sa de exact 3 ori.
Exemplu : Vom da un exemplu și de o funcție ce își atinge fiecare valoare a sa de exact n ori :

$h_n(x) = (2k+1) - (-1)^k cos(x), nk\pi \leq x \leq n(k+1)\pi$
Dacă înlocuim n = 5 vom obține :

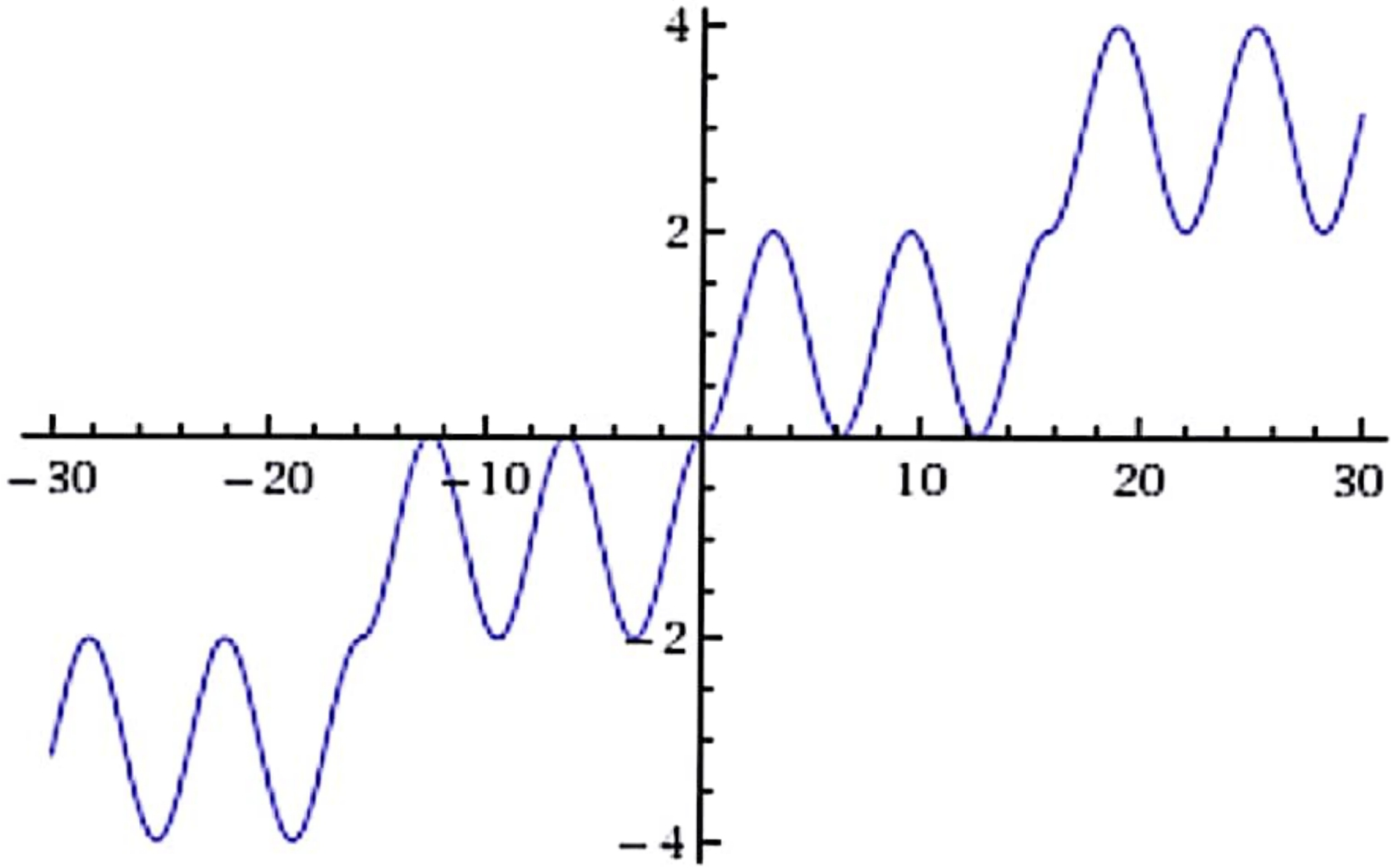

Figure: Graficul funcției h_5

Exercițiul 1. : Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și strict monotonă pe ramuri (O funcție pe ramuri este strict monotonă pe [0,1], dacă există o partiție a intervalului [0,1] , în mai multe subintervale finite $[t_{i-1}, t_i]$, unde $i = 1, 2, ..., n$ și $0 = t_0 < t_1 < ...... < t_n = 1$, astfel încât f este strict monotonă pe fiecare din aceste subintervale).Demonstrați că f își atinge cel puțin o valoare de a sa de un număr impar de ori.

Demonstrație

Avem că f este strict monotonă pe fiecare din intervalele $[t_{i-1}, t_i]$, unde $i = 1, 2, ..., n$ si $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$. Fie mulțimea $Y = \{f(t_i)|0 \leq i \leq n\}$ care conține cel mult n+1 elemente distincte : $y_0, y_1, ..., y_m$. Putem presupune că $y_0 < y_1 < ... < y_m$. Să luăm $z_{2i} = y_i, o \leq i \leq m$, și alegem $z_1, z_3, ..., z_{2m-1}$ astfel încât $z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < ... < z_{2m-1} < z_{2m}$. Fie $X_k = \{x \in [0,1]|f(x) = z_k\}$ cu $k \in \{0, 1, ..., 2m\}$ și $X = X_0 \cup X_1 \cup ... \cup X_{2m} = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$, două câte două distincte și fie $0 = x_1 < x_2 < ... < x_N = 1$. Pentru $1 \leq j \leq N$, fie k_j singurul element al mulțimii $\{1, 2, ..., 2m\}$ pentru care $f(x_j) = z_{k_j}$. Atunci k_1 și k_N sunt pare și

$k_j - k_{j+1} = \pm 1, 1 \leq j \leq N$. Rezultă atunci că numărul N de elemente a lui X este impar. În consecință , una dintre mulțimile $X_k = f^{-1}(z_k)$ are un număr impar de elemente.

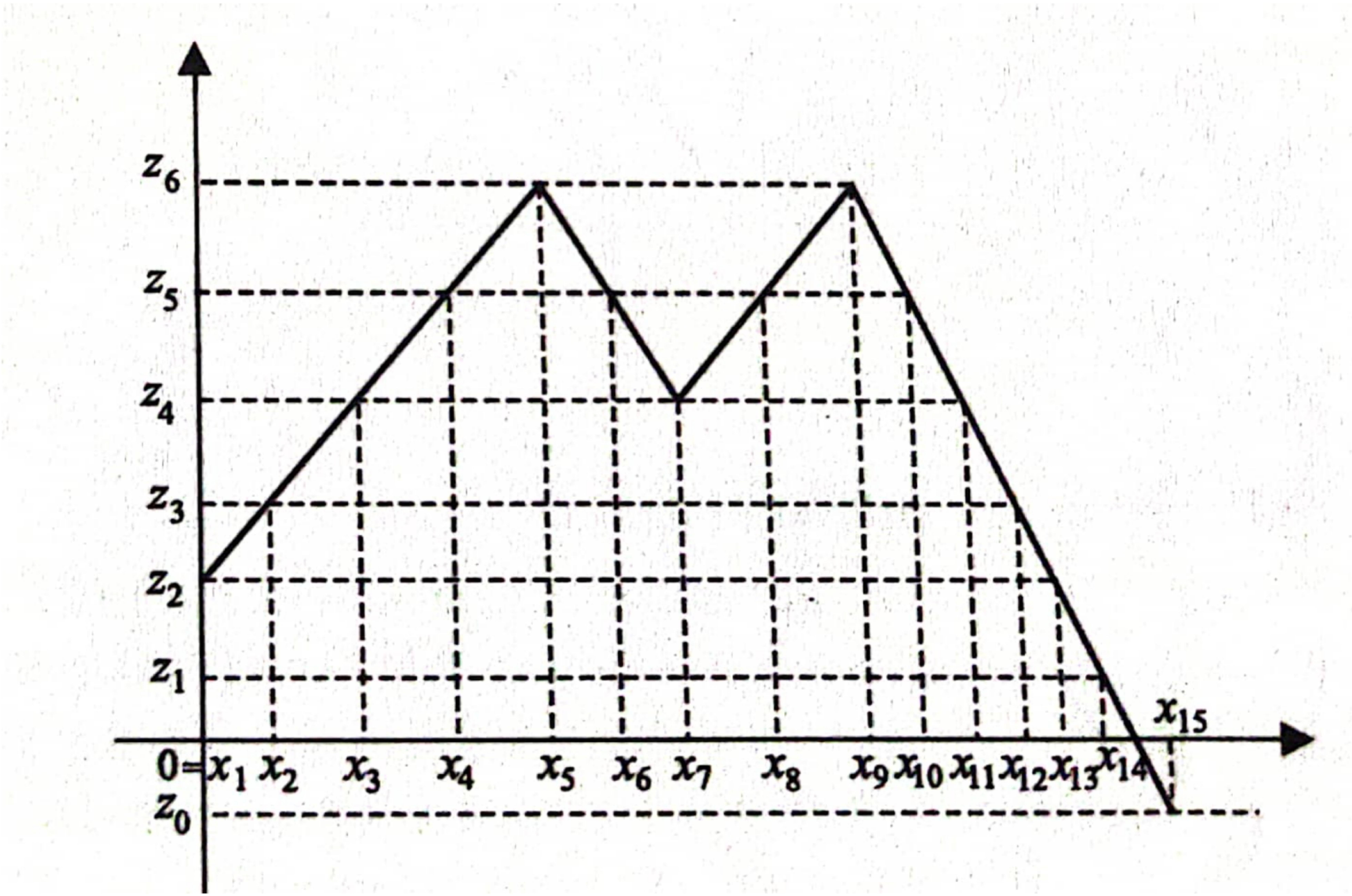

Figure: Graficul funcției f

Exercițiul 2 : Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă ce își va atinge fiecare valoare a sa de un număr finit de ori și $f(0) \neq f(1)$. Atunci există o valoare a sa luată de un număr impar de ori.

Bibliografie

Problems in Mathematical Analysis 1 - Real Numbers, Sequences and Series - authors : W.J. Kaczor and M.T. Nowak