Sesiunea de Comunicări Matematice
Metode elementare de rezolvare a ecuațiilor diofantice

Cabăț Maria-Alexandra

9 Decembrie 2023

Cuprins

Rezolvarea ecuațiilor diofantice de tipul $a^x + b^y = c^z$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$

Rezolvarea ecuațiilor diofantice de tipul $a^x + b^y = c^z$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$

Diofant, ”tatăl algebrei”, este foarte bine cunoscut pentru cartea sa Aritmetica, o lucrare asupra ecuațiilor algebrice și despre teoria numerelor.

Rezolvarea ecuațiilor diofantice de tipul $a^x + b^y = c^z$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$

Diofant, "tatăl algebrei", este foarte bine cunoscut pentru cartea sa Aritmetica, o lucrare asupra ecuațiilor algebrice și despre teoria numerelor.
În continuare vom numi ecuația diofantică o ecuație de forma:

Rezolvarea ecuațiilor diofantice de tipul $a^x + b^y = c^z$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$

Diofant, "tatăl algebrei", este foarte bine cunoscut pentru cartea sa Aritmetica, o lucrare asupra ecuațiilor algebrice și despre teoria numerelor.
În continuare vom numi ecuația diofantică o ecuație de forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0(*)$$

Rezolvarea ecuațiilor diofantice de tipul $a^x + b^y = c^z$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$

Diofant, "tatăl algebrei", este foarte bine cunoscut pentru cartea sa Aritmetica, o lucrare asupra ecuațiilor algebrice și despre teoria numerelor.
În continuare vom numi ecuația diofantică o ecuație de forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0(*)$$

unde f este o funcție de n variabile și $n \geqslant 2$. Dacă f este polinomială cu coeficienți întregi, $(*)$ poartă numele de ecuație diofantică algebrică.

Rezolvarea ecuațiilor diofantice de tipul $a^x + b^y = c^z$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$

Diofant, "tatăl algebrei", este foarte bine cunoscut pentru cartea sa Aritmetica, o lucrare asupra ecuațiilor algebrice și despre teoria numerelor.
În continuare vom numi ecuația diofantică o ecuație de forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0(*)$$

unde f este o funcție de n variabile și $n \geqslant 2$. Dacă f este polinomială cu coeficienți întregi, $(*)$ poartă numele de ecuație diofantică algebrică.

Un n-uplu $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{Z}^n$ care satisface $(*)$ se numește soluție a ecuației $(*)$. O ecuație care are una sau mai multe soluții se numește solvabilă.

Un n-uplu $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{Z}^n$ care satisface $(*)$ se numește soluție a ecuației $(*)$. O ecuație care are una sau mai multe soluții se numește solvabilă.
Opera lui Diofant referitoare la ecuațiile de tipul $(*)$ a fost continuată de către matematicienii chinezi (în secolul al 3-lea), arabi(în secolele 8-12) și apoi aprofundată de către Fermat, Euler, Lagrange, Gauss și mulți alții. Această problematică a rămas un domeniu de interes al matematicii contemporane.

Un n-uplu $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{Z}^n$ care satisface $(*)$ se numește soluție a ecuației $(*)$. O ecuație care are una sau mai multe soluții se numește solvabilă.
Opera lui Diofant referitoare la ecuațiile de tipul $(*)$ a fost continuată de către matematicienii chinezi (în secolul al 3-lea), arabi(în secolele 8-12) și apoi aprofundată de către Fermat, Euler, Lagrange, Gauss și mulți alții. Această problematică a rămas un domeniu de interes al matematicii contemporane.

În cadrul acestei prezentări voi expune un instrument matematic foarte util în abordarea ecuațiilor diofantice. Acesta poate funcționa chiar și de unul singur în rezolvarea exercițiilor cu un grad de dificultate mediu, sau poate sprijini alte idei mai ingenioase în rezolvarea problemelor dificile.

În cadrul acestei prezentări voi expune un instrument matematic foarte util în abordarea ecuațiilor diofantice. Acesta poate funcționa chiar și de unul singur în rezolvarea exercițiilor cu un grad de dificultate mediu, sau poate sprijini alte idei mai ingenioase în rezolvarea problemelor dificile.
Prezentarea se concentrează pe ecuațiile diofantice de tipul $a^x + b^y = c^z$, unde a, b, c sunt numere naturale și x, y, z sunt necunoscutele.

Ecuații diofantice liniare: metode de rezolvare

Ecuații diofantice liniare: metode de rezolvare

O ecuație de forma

$$a_1 x_1 + ... + a_n x_n = b$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n, b$ sunt numere întregi fixate, se numește ecuație diofantică liniară.

Ecuații diofantice liniare: metode de rezolvare

O ecuație de forma

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n, b$ sunt numere întregi fixate,
se numește ecuație diofantică liniară.
Presupunem că $n \geqslant 1$ și coeficienții $a_1, \ldots, a_n$ sunt toți diferiți de zero.

Ecuații diofantice liniare: metode de rezolvare

O ecuație de forma

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n, b$ sunt numere întregi fixate,
se numește ecuație diofantică liniară.
Presupunem că $n \geqslant 1$ și coeficienții $a_1, \ldots, a_n$ sunt toți diferiți de zero.
Rezultatul principal referitor la ecuațiile diofantice liniare este următorul.

Teorema 1: *Ecuația este solvabilă dacă și numai dacă*

Teorema 1: *Ecuația este solvabilă dacă și numai dacă*

$$(a_1, \ldots, a_n) | b$$

Teorema 1: *Ecuația este solvabilă dacă și numai dacă*

$$(a_1, ..., a_n)|b$$

Demonstrație. Fie d=$(a_1, ..., a_n)$. Dacă b nu este divizibil prin d, atunci ecuația nu este solvabilă, deoarece pentru orice numere întregi $x_1, ..., x_n$ membrul stâng din $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ este divizibil cu d, iar membrul drept nu are această proprietate.

Dacă $d|b$, atunci obținem ecuația echivalentă

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + ... + a'_n x_n = b'$$

unde $a'_i = a_i/d, i = 1, ..., n$ și $b' = b/d$. Evident, $(a'_1, \dots, a'_n) = 1$.
În cazul n = 1, ecuația are forma $x_1 = b$ sau $-x_1 = b$, iar soluția ei nu depinde de nici un parametru.
Voi demonstra cazul n = 2.
Fie ecuația:

$$a \cdot x + b \cdot y = u$$

unde a, b, u sunt numere întregi fixate.
Atunci ecuația este solvabilă dacă și numai dacă $d|u$, unde d=(a,b).

Demonstrație:
Fie $d = (a, b)$
$'' \Rightarrow''$ Presupunem că ecuația este solvabilă și rezultă că există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \cdot x + b \cdot y = u$. Trebuie să demonstrăm că $d|u$.
$d = (a, b) => d|a$ și $d|b => d|a \cdot x$ și $d|b \cdot y => d|(ax + by) => d|u$.
$'' \Leftarrow''$ Fie $d = (u, b)$. Presupunem că $d|u$. Trebuie să arătăm că există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \cdot x + b \cdot y = u$.
$d|a => a = d \cdot a', a' \in \mathbb{Z}$
$d|b => b = d \cdot b', b' \in \mathbb{Z}$
$d = (a, b) => (a', b') = 1$

Cum $(a', b') = 1 \Rightarrow \exists\ m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \cdot a' + n \cdot b' = 1$.
$d|u \Rightarrow u = d \cdot u'$.

Cum $(a', b') = 1 => \exists\ m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \cdot a' + n \cdot b' = 1$.
$d|u => u = d \cdot u'$.
Avem relația $m \cdot a' + n \cdot b' = 1$, dar înmulțind totul cu $d \cdot u'$, obținem:

$$m \cdot a' \cdot d \cdot u' + n \cdot b' \cdot d \cdot u' = d \cdot u'$$

Cum $(a', b') = 1 => \exists\ m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \cdot a' + n \cdot b' = 1$.
$d|u => u = d \cdot u'$.
Avem relația $m \cdot a' + n \cdot b' = 1$, dar înmulțind totul cu $d \cdot u'$, obținem:

$$m \cdot a' \cdot d \cdot u' + n \cdot b' \cdot d \cdot u' = d \cdot u'$$

Să nu uităm că $a' \cdot d = a$, $b' \cdot d = b$, dar și $d \cdot u' = u$.
Așadar, avem $m \cdot u' \cdot a + n \cdot u' \cdot b = u$.

Cum $(a`, b`) = 1 => \exists\ m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \cdot a` + n \cdot b` = 1$.
$d|u => u = d \cdot u`$.
Avem relația $m \cdot a` + n \cdot b` = 1$, dar înmulțind totul cu $d \cdot u`$, obținem:

$$m \cdot a` \cdot d \cdot u` + n \cdot b` \cdot d \cdot u` = d \cdot u`$$

Să nu uităm că $a` \cdot d = a$ , $b` \cdot d = b$, dar și $d \cdot u` = u$.
Așadar, avem $m \cdot u` \cdot a + n \cdot u` \cdot b = u$.
Fie $x = m \cdot u` \in \mathbb{Z}$ și $y = n \cdot v` \in \mathbb{Z}$
Rezultă în continuare că există x, y $\in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \cdot x + b \cdot y = u$, rezultă că ecuația $a \cdot x + b \cdot y = u$ este solvabilă.

Cum $(a', b') = 1 => \exists\ m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \cdot a' + n \cdot b' = 1$.
$d|u => u = d \cdot u'$.
Avem relația $m \cdot a' + n \cdot b' = 1$, dar înmulțind totul cu $d \cdot u'$, obținem:

$$m \cdot a' \cdot d \cdot u' + n \cdot b' \cdot d \cdot u' = d \cdot u'$$

Să nu uităm că $a' \cdot d = a$, $b' \cdot d = b$, dar și $d \cdot u' = u$.
Așadar, avem $m \cdot u' \cdot a + n \cdot u' \cdot b = u$.
Fie $x = m \cdot u' \in \mathbb{Z}$ și $y = n \cdot v' \in \mathbb{Z}$
Rezultă în continuare că există x, y $\in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \cdot x + b \cdot y = u$, rezultă că ecuația $a \cdot x + b \cdot y = u$ este solvabilă.
Pe cazul general, facem inducție după n.

Voi demonstra o relație de care mă voi ajuta pe parcursul următoarelor exemple:

$$(a+b)^k = a^k + \mathcal{M}_b$$

unde a ,b $\in \mathbb{N}^*$, k $\in \mathbb{N}^*$

$(a+b)^k = a^k + C_k^1 \cdot a^{k-1} \cdot b + C_k^2 \cdot a^{k-2} \cdot b^2 + ... + C_k^{k-1} \cdot a^1 \cdot b^{k-1} + C_k^k \cdot b^k$

$= a^k + b \cdot (C_k^1 \cdot a^{k-1} + C_k^2 \cdot a^{k-2} \cdot b + ... + C_k^{k-1} \cdot a \cdot b^{k-2} + C_k^k \cdot b^{k-1})$

$= a^k + \mathcal{M}_b$

Metoda pe care o vom aborda presupune, mai întâi, să găsim câteva soluții, dând valori mici necunoscutelor și apoi să demonstrăm că nu există alte soluții, pornind de la soluția cu x maxim și calculând ecuația inițială modulo a^{x+1} sau, analog, pentru y sau z.

Metoda pe care o vom aborda presupune, mai întâi, să găsim câteva soluții, dând valori mici necunoscutelor și apoi să demonstrăm că nu există alte soluții, pornind de la soluția cu x maxim și calculând ecuația inițială modulo a^{x+1} sau, analog, pentru y sau z.

Pentru a rezolva următorul exemplu, voi avea nevoie de câteva leme pe care le voi enunța, dar și demonstra.

Pentru a rezolva următorul exemplu, voi avea nevoie de câteva leme pe care le voi enunța, dar și demonstra.

Lema 1 *Resturile puterilor naturale ale lui 2 modulo 7 sunt 1, 2, 4.*

Pentru a rezolva următorul exemplu, voi avea nevoie de câteva leme pe care le voi enunța, dar și demonstra.

Lema 1 *Resturile puterilor naturale ale lui 2 modulo 7 sunt 1, 2, 4.*

Demonstrație:

$$2^a \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}, \forall a \in \mathbb{N}$$

Caz 1: $a = 0 => 2^a = 2^0 = 1 = 0 \cdot 7 + 1 \in \mathcal{M}_7 + 1$
Caz 2: $a = 1 => 2^a = 2^1 = 2 = 0 \cdot 7 + 2 \in \mathcal{M}_7 + 2$
Caz 3: $a = 2 => 2^a = 2^2 = 4 = 0 \cdot 7 + 4 \in \mathcal{M}_7 + 4$
Caz 4: $a = 3 => 2^a = 2^3 = 8 = 0 \cdot 7 + 7 + 1 \in \mathcal{M}_7 + 1$

Caz 4.i: $a = 3b, b \in \mathbb{N}^*, b \geqslant 1$
$=> 2^a = 2^{3 \cdot b} = 8^b = (7+1)^b = \mathcal{M}_7 + 1$
Caz 4.ii: $a = 3b+1, b \in \mathbb{N}^*$
$=> 2^a = 2^{3b+1} = 2 \cdot 2^{3b} = 2 \cdot (\mathcal{M}_7 + 1) = \mathcal{M}_7 + 2$
Caz 4.iii: $a = 3b+2, b \in \mathbb{N}^*$
$=> 2^a = 2^{3b+2} = 2^2 \cdot 2^{3b} = 4 \cdot (\mathcal{M}_7 + 1) = \mathcal{M}_7 + 4$

$$=> 2^a \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}$$

Am încheiat demonstrația.

Lema 2 *Resturile puterilor pare ale lui 3 modulo 7 sunt 1, 2, 4*

Lema 2 *Resturile puterilor pare ale lui 3 modulo 7 sunt 1, 2, 4*

Demonstrație:

$$3^{2\cdot a} \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}, \forall a \in \mathbb{N}$$

Caz 1: $a = 0 => 3^{2\cdot a} = 3^0 = 1 = 0 \cdot 7 + 1 \in \mathcal{M}_7 + 1$
Caz 2: $a = 1 => 3^{2\cdot a} = 3^2 = 9 = 7 + 2 \in \mathcal{M}_7 + 2$
Caz 3: $a = 2 => 3^{2\cdot a} = 3^4 = 81 = 11 \cdot 7 + 4 \in \mathcal{M}_7 + 4$
Caz 4: $a \geqslant 3 => a = 3 + b, b \in \mathbb{N}^*$
$=> 3^{2\cdot a} = 3^{2\cdot(3+b)} = 3^{6+2b} = 3^6 \cdot 3^{2b} = 729 \cdot 9^k$
$= (\mathcal{M}_7 + 1) \cdot 9^b = \mathcal{M}_7 + 9^b = \mathcal{M}_7 + (7+2)^b = \mathcal{M}_7 + \mathcal{M}_7 + 2^b = \mathcal{M}_7 + 2^b$
Din Lema 1 $=> 2^b \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}$

$$=> 3^{2\cdot a} \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}$$

Am încheiat demonstrația.

Lema 3 *Resturile puterilor impare ale lui 3 modulo 7 sunt 3, 5, 6*
Demonstrație:

$$3^{2\cdot a+1} \in \{\mathcal{M}_7 + 3, \mathcal{M}_7 + 5, \mathcal{M}_7 + 6\}, \forall a \in \mathbb{N}$$

Caz 1: $a = 0 => 3^{2\cdot a+1} = 3^1 = 3 = 0 \cdot 7 + 3 \in \mathcal{M}_7 + 3$
Caz 2: $a = 1 => 3^{2\cdot a+1} = 3^3 = 27 = 3 \cdot 7 + 6 \in \mathcal{M}_7 + 6$
Caz 3: $a = 2 => 3^{2\cdot a+1} = 3^5 = 243 = 34 \cdot 7 + 5 \in \mathcal{M}_7 + 5$
Caz 4: $a \geqslant 3 => a = 3 + b, b \in \mathbb{N}^*$
$=> 3^{2\cdot a+1} = 3^{2\cdot(3+b)+1} = 3^{(6+2b)+1} = 3^{6+2b} \cdot 3 = 3^6 \cdot 3^{2\cdot b} \cdot 3 = 3^7 \cdot 3^{2\cdot b} = 2187 \cdot 9^b = (\mathcal{M}_7 + 3) \cdot 9^b = \mathcal{M}_7 + 3 \cdot 9^b$
$=> \mathcal{M}_7 + 3 \cdot (7+2)^b = \mathcal{M}_7 + 3 \cdot (\mathcal{M}_7 + 2^b) = \mathcal{M}_7 + 3 \cdot 2^b$
Din Lema 1 $=> 2^b \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}$
Iar $3 \cdot 2^b \in \{\mathcal{M}_7 + 3, \mathcal{M}_7 + 6, \mathcal{M}_7 + 5\}$
Am încheiat demonstrația.

Exemplul 1. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $3^x = 2^y + 7$.

Caz 1: $y = 0 => 3^x = 1 + 7 => 3^x = 8 => x = \log_3 8 \notin \mathbb{N}$

Caz 2: $y = 1 => 3^x = 2 + 7 => 3^x = 9 => x = 2$

Exemplul 1. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $3^x = 2^y + 7$.

Caz 1: $y = 0 => 3^x = 1 + 7 => 3^x = 8 => x = \log_3 8 \notin \mathbb{N}$

Caz 2: $y = 1 => 3^x = 2 + 7 => 3^x = 9 => x = 2$

Momentan singura soluție este x = 2 și y = 1.

Demonstrăm acum că aceasta este singura soluție, analizând ecuația modulo 4, apoi modulo 7.

Exemplul 1. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $3^x = 2^y + 7$.
Caz 1: $y = 0 => 3^x = 1 + 7 => 3^x = 8 => x = \log_3 8 \notin \mathbb{N}$
Caz 2: $y = 1 => 3^x = 2 + 7 => 3^x = 9 => x = 2$
Momentan singura soluție este x = 2 și y = 1.
Demonstrăm acum că aceasta este singura soluție, analizând ecuația modulo 4, apoi modulo 7.
Caz 3: Pentru $y \geqslant 2, y \in \mathbb{N} => y = 2 + a, a \in \mathbb{N}$
$2^y = 2^{2+a} = 2^2 \cdot 2^a = 4 \cdot 2^a \in \mathcal{M}_4$
$3^x = 4 \cdot 2^a + 4 + 3$
$3^x = 4 \cdot (2^a + 1) + 3 => 3^x \in \mathcal{M}_4 + 3$

(1)

Caz 3.1: $x \in \mathcal{M}_4 => x = 4k$
$3^x = 3^{4 \cdot k} = 81^k = (20 \cdot 4 + 1)^k = \mathcal{M}_4 + 1$

$$(2)$$

Din (1), (2) $=> \mathcal{M}_4 + 3 = \mathcal{M}_4 + 1 => 2 \in \mathcal{M}_4$, ceea ce este fals.

Caz 3.1: $x \in \mathcal{M}_4 => x = 4k$
$3^x = 3^{4 \cdot k} = 81^k = (20 \cdot 4 + 1)^k = \mathcal{M}_4 + 1$

$$(2)$$

Din (1), (2) $=> \mathcal{M}_4 + 3 = \mathcal{M}_4 + 1 => 2 \in \mathcal{M}_4$, ceea ce este fals.
Caz 3.2: $x \in \mathcal{M}_4 + 1 => x = 4k + 1$
$3^x = 3^{4k+1} = 3^{4k} \cdot 3 = 81^k \cdot 3 = (20 \cdot 4 + 1)^k \cdot 3 = (\mathcal{M}_4 + 1) \cdot 3 = \mathcal{M}_4 + 3$

$$(3)$$

Din (1), (3) $=> \mathcal{M}_4 + 3 = \mathcal{M}_4 + 3 => 0 \in \mathcal{M}_4$, ceea ce este adevărat.

Suntem în cazul în care $y \geqslant 2$ *și* $x = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$
$y \geqslant 2 => y = 2 + a,\ a \in \mathbb{N}$
Avem ecuația $3^x = 2^y + 7$

$$(**)$$

Suntem în cazul în care $y \geqslant 2$ *și* $x = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$
$y \geqslant 2 => y = 2 + a,\ a \in \mathbb{N}$
Avem ecuația $3^x = 2^y + 7$

$$(**)$$

Din Lema 1 prezentată anterior, care spune că resturile puterilor naturale ale lui 2 modulo 7 sunt 1, 2, 4 rezultă că:
$2^y \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}, \forall y \in \mathbb{N}$
$2^y + 7 \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}, \forall y \in \mathbb{N}$

$$(***)$$

Din $(**)$, $(***) => 3^x \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}$
Știm și că $x \in 4k + 1$.
Din Lema 3, prezentată anterior, care spune că resturile puterilor impare ale lui 3 modulo 7 sunt 3, 5, 6, rezultă că:
$3^x \in \{\mathcal{M}_7 + 3, \mathcal{M}_7 + 5, \mathcal{M}_7 + 6\}$, contradicție cu ideea de mai sus.

Din $(**), (***) => 3^x \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}$
Știm și că $x \in 4k + 1$.
Din Lema 3, prezentată anterior, care spune că resturile puterilor impare ale lui 3 modulo 7 sunt 3, 5, 6, rezultă că:
$3^x \in \{\mathcal{M}_7 + 3, \mathcal{M}_7 + 5, \mathcal{M}_7 + 6\}$, contradicție cu ideea de mai sus.
Caz 3.3: $x \in \mathcal{M}_4 + 2 => x = 4k + 2$
$3^x = 3^{4k+2} = 3^{4k} \cdot 3^2 = 81^k \cdot 3^2 = (20 \cdot 4 + 1)^k \cdot 9 = (\mathcal{M}_4 + 1) \cdot 9 = \mathcal{M}_4 + 9 = \mathcal{M}_4 + 8 + 1 = \mathcal{M}_4 + 1$

$$(4)$$

Din (1), (4) $=> \mathcal{M}_4 + 3 = \mathcal{M}_4 + 1 => 2 \in \mathcal{M}_4$, ceea ce este fals.

Caz 3.4: $x \in \mathcal{M}_4 + 3 => x = 4k + 3$
$3^x = 3^{4k+3} = 3^{4k} \cdot 3^3 = 81^k \cdot 3^3 = (20 \cdot 4 + 1)^k \cdot 27 = (\mathcal{M}_4 + 1) \cdot 27 = \mathcal{M}_4 + 27 = \mathcal{M}_4 + 24 + 3 = \mathcal{M}_4 + 3$

$$(5)$$

Din (1), (5) $=> \mathcal{M}_4 + 3 = \mathcal{M}_4 + 3 => 0 \in \mathcal{M}_4$, ceea ce este adevărat.

Avem ecuația $3^x = 2^y + 7$.
Știm că $x = 4k + 3$, dar și că

$$2^y + 7 \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}, \forall y \in \mathbb{N}$$

rezultă că $3^x \in \{\mathcal{M}_7 + 1, \mathcal{M}_7 + 2, \mathcal{M}_7 + 4\}$
Fiind $x = 4k + 3$, impar

$$=> 3^x \in \{\mathcal{M}_7 + 3, \mathcal{M}_7 + 5, \mathcal{M}_7 + 6\}$$

contradicție cu ideea de mai sus.

Exemplul 2. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $3^x + 1 = 2^y$.

Exemplul 2. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $3^x + 1 = 2^y$.

Caz 1

$y = 0 \Rightarrow 3^x + 1 = 1 \Rightarrow 3^x = 0 \Rightarrow y \neq 0$

Exemplul 2. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $3^x + 1 = 2^y$.

Caz 1

$y = 0 => 3^x + 1 = 1 => 3^x = 0 => y \neq 0$

Caz 2

$y = 1 => 3^x + 1 = 2 => 3^x = 1 => x = 0$

Exemplul 2. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $3^x + 1 = 2^y$.

Caz 1

$y = 0 => 3^x + 1 = 1 => 3^x = 0 => y \neq 0$

Caz 2

$y = 1 => 3^x + 1 = 2 => 3^x = 1 => x = 0$

Caz 3

$y = 2 => 3^x + 1 = 4 => 3^x = 3 => x = 1$

Caz 4

Demonstrăm acum că acestea sunt singurele soluții, analizând ecuația modulo 8.

Caz 4

Demonstrăm acum că acestea sunt singurele soluții, analizând ecuația modulo 8.

Pentru $y \geqslant 3, y \in \mathbb{N} => y$ va fi de forma $y = 3 + a, a \in \mathbb{N}$

$$3^x + 1 = 2^{3+a} => 3^x + 1 = (2^3) \cdot 2^a => 3^x + 1 = 8 \cdot 2^a$$

$$=> 3^x = 8 \cdot 2^a - 1$$

$8 \cdot 2^a$ este multiplu de 8 $=> 8 \cdot 2^a \in \mathcal{M}_8$

$8 \cdot 2^a - 1 \in \mathcal{M}_8 + 7$

$$(1)$$

Caz 4.1

$x \in \mathcal{M}_8 => x = 8 \cdot k => 3^x = 3^{8 \cdot k} = (3^8)^k$

$$=> 3^x = (6561)^k$$

$6561 = 8 \cdot 820 + 1$

$3^x = (8 \cdot 820 + 1)^k = \mathcal{M}_8 + 1$

$$(2)$$

Din (1) , (2) $=> \mathcal{M}_8 + 1 = \mathcal{M}_8 - 1 => 2 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.2

$$x \in \mathcal{M}_8 + 1 => x = 8 \cdot k + 1$$

$3^x = 3^{8 \cdot k+1} = (3^8)^k \cdot 3 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3 = \mathcal{M}_8 + 3 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 3$

$$(3)$$

Din (1), (3) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 3 => 4 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.2

$$x \in \mathcal{M}_8 + 1 => x = 8 \cdot k + 1$$

$3^x = 3^{8 \cdot k+1} = (3^8)^k \cdot 3 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3 = \mathcal{M}_8 + 3 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 3$

(3)

Din (1), (3) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 3 => 4 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.3

$$x \in \mathcal{M}_8 + 2 => x = 8 \cdot k + 2$$

$3^x = 3^{8 \cdot k+2} = (3^8)^k \cdot 3^2 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^2 = \mathcal{M}_8 + 3^2 = \mathcal{M}_8 + 8 + 1 = \mathcal{M}_8 + 1 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 1$

(4)

Din (1), (4) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 1 => 2 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.4

$$x \in \mathcal{M}_8 + 3 => x = 8 \cdot k + 3$$

$3^x = 3^{8\cdot k+3} = (3^8)^k \cdot 3^3 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^3 = \mathcal{M}_8 + 3^3 = \mathcal{M}_8 + 24 + 3 = \mathcal{M}_8 + 3 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 3$

$$(5)$$

Din (1), (5) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 3 => 4 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.4

$$x \in \mathcal{M}_8 + 3 => x = 8 \cdot k + 3$$

$3^x = 3^{8 \cdot k+3} = (3^8)^k \cdot 3^3 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^3 = \mathcal{M}_8 + 3^3 = \mathcal{M}_8 + 24 + 3 = \mathcal{M}_8 + 3 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 3$

$$(5)$$

Din (1), (5) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 3 => 4 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.5

$$x \in \mathcal{M}_8 + 4 => x = 8 \cdot k + 4$$

$3^x = 3^{8 \cdot k+4} = (3^8)^k \cdot 3^4 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^4 = \mathcal{M}_8 + 3^4 = \mathcal{M}_8 + 80 + 1 = \mathcal{M}_8 + 1 => 3^x \in \mathcal{M}_8 + 1$

$$(6)$$

Din (1), (6) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 1 => 2 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.6

$$x \in \mathcal{M}_8 + 5 => x = 8 \cdot k + 5$$

$3^x = 3^{8 \cdot k+5} = (3^8)^k \cdot 3^5 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^5 = \mathcal{M}_8 + 3^5 = \mathcal{M}_8 + 8 \cdot 30 + 3 = \mathcal{M}_8 + 3 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 3$

$$(7)$$

Din (1), (7) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 3 => 4 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.6

$$x \in \mathcal{M}_8 + 5 => x = 8 \cdot k + 5$$

$3^x = 3^{8 \cdot k+5} = (3^8)^k \cdot 3^5 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^5 = \mathcal{M}_8 + 3^5 = \mathcal{M}_8 + 8 \cdot 30 + 3 = \mathcal{M}_8 + 3 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 3$

$$(7)$$

Din (1), (7) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 3 => 4 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.7

$$x \in \mathcal{M}_8 + 6 => x = 8 \cdot k + 6$$

$3^x = 3^{8 \cdot k+6} = (3^8)^k \cdot 3^6 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^6 = \mathcal{M}_8 + 3^6 = \mathcal{M}_8 + 91 \cdot 8 + 1 = \mathcal{M}_8 + 1 => 3^x \in \mathcal{M}_8 + 1$

$$(8)$$

Din (1), (8) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 1 => 2 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.8

$$x \in \mathcal{M}_8 + 7 => x = 8 \cdot k + 7$$

$3^x = 3^{8 \cdot k + 7} = (3^8)^k \cdot 3^7 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^7 = \mathcal{M}_8 + 3^7 = \mathcal{M}_8 + 273 \cdot 8 + 3 = \mathcal{M}_8 + 3 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 3$

(9)

Din (1), (9) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 3 => 4 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.

Caz 4.8

$$x \in \mathcal{M}_8 + 7 => x = 8 \cdot k + 7$$

$$3^x = 3^{8 \cdot k+7} = (3^8)^k \cdot 3^7 = (\mathcal{M}_8 + 1)^k \cdot 3^7 = \mathcal{M}_8 + 3^7 = \mathcal{M}_8 + 273 \cdot 8 + 3 = \mathcal{M}_8 + 3 => 3^x = \mathcal{M}_8 + 3 \tag{9}$$

Din (1), (9) $=> \mathcal{M}_8 - 1 = \mathcal{M}_8 + 3 => 4 \in \mathcal{M}_8$, ceea ce este fals.
Observăm că toate puterile lui 3 sunt de forma $\mathcal{M}_8 + 1$ sau $\mathcal{M}_8 + 3$. Rezulă că singurele soluții sunt cele găsite inițial.

1. T. Andreescu, D. Andrica, O introducere în studiul ecuațiilor diofantiene, Editura GIL, Zalău, 2002.
2. L. Moanță, O idee utilă în rezolvarea ecuațiilor diofantice, Gazeta Matematică Seria B, 2021, Nr 6-7-8, pg. 289 - 291.
3. https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.wordpress.com/

Vă mulțumesc pentru atenția acordată!