Sisteme de navigație

Raul Botea
Academia Navală “Mircea cel Batrân” Constanța

Sesiunea de Comunicări Matematice Decembrie 2023

Cuprins

-Sisteme hiperbolice de navigație

-Sistemul Loran

-”Prețul tehnologiei”

Hiperbola

Hiperbola este locul geometric al tuturor punctelor M cu proprietatea ca diferența distanțelor la două puncte fixe numite focare este constantă.

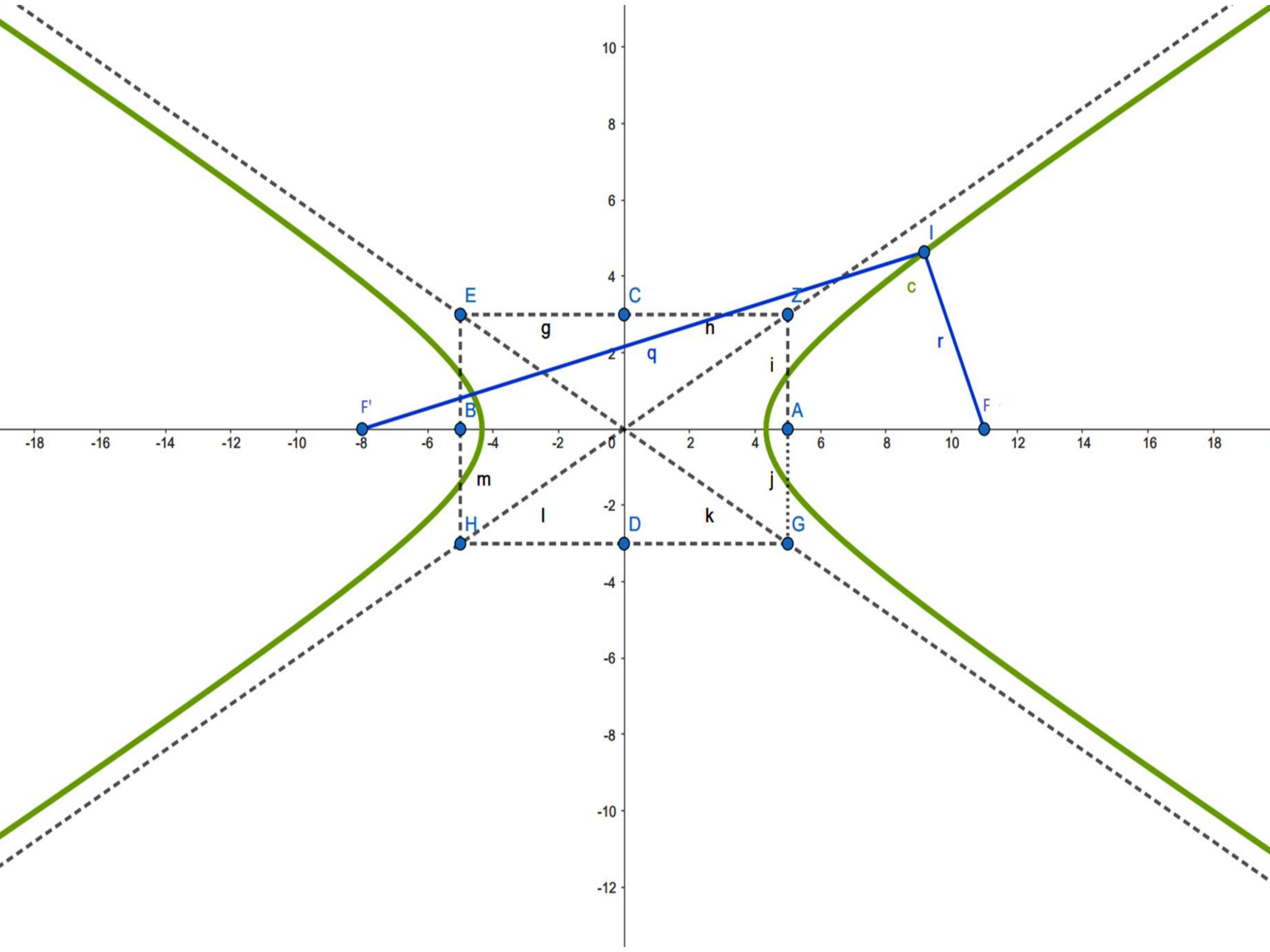
Ecuația hiperbolei cu centrul în originea sistemului de coordonate este:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

unde $a, b > 0$

Atunci când centrul hiperbolei este in $C(x_0 , y_0)$ ecuația hiperbolei devine:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - 1 = 0$$



E
C
Z
I
c
g
h
q
r
i
F'
B
A
F
m
j
l
k
H
D
G

Sisteme hiperbolice de navigaţie

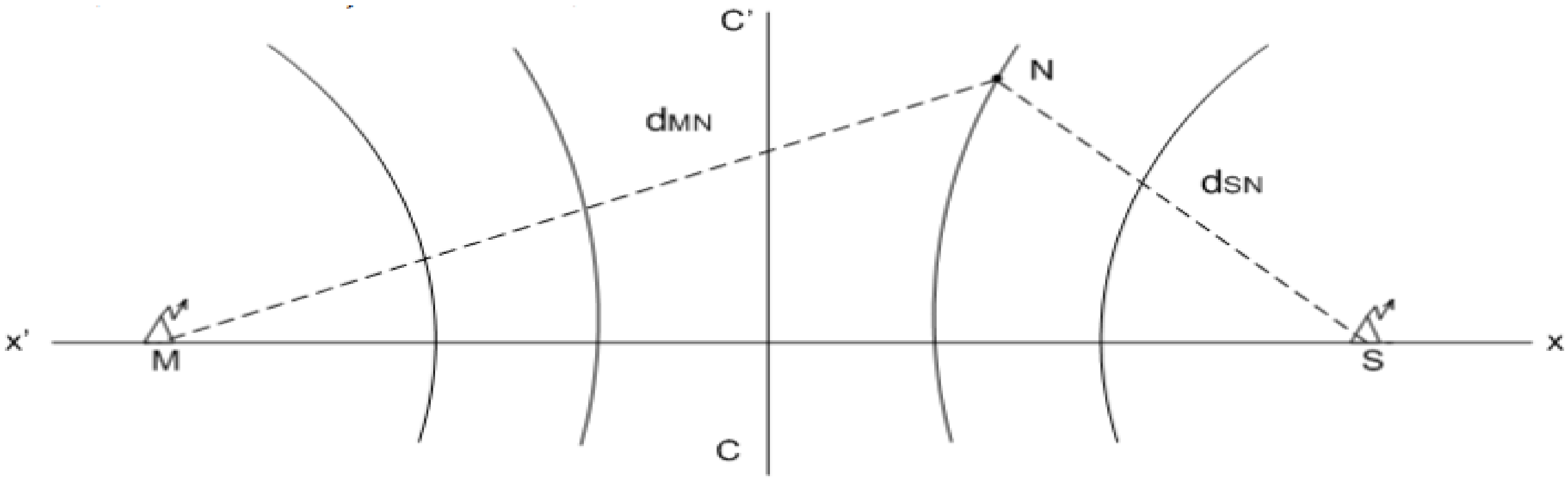
Unul dintre domeniile de aplicare a hiperbolelor este sistemul hiperbolic de navigaţie, sistem radioelectronic, utilizat pentru identificarea poziţiei, în mod continuu, a mijloacelor de transport maritime, aeriene şi terestre.

Acestea au o caracteristică comună, tipul de linie de poziţie - hiperbola, generată de funcţionarea în comun a unor perechi de staţii, grupate în lanţuri.

Fiecare lanţ hiperbolic se compune dintr-o staţie principală (Master) şi mai multe staţii secundare (Slave). Perechile sunt formate din staţia principală cu fiecare din staţiile secundare.

Linia de poziţie hiperbolică

Linia de poziţie generată de sistemele hiperbolice de navigaţie reprezintă locul geometric al tuturor punctelor de egală diferenţă de distanţă faţă de două puncte fixe - focare, în care sunt instalate staţiile de emisie componente ale unei perechi (Master şi Slave).



M- Master

S – Slave

N – poziţia navei

MS- linie de bază

xM, x'S – extensiile liniei de bază

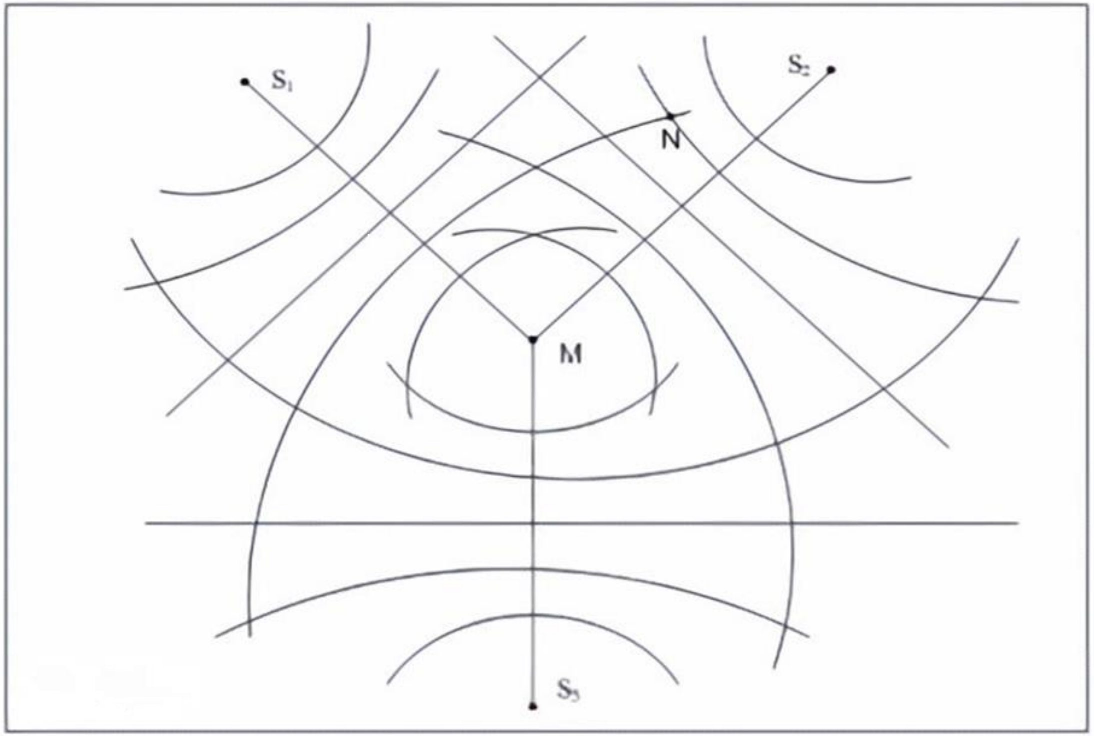
CC' – linie centrală

dMN – distanţa Master – navă

dSN – distanţa Slave - navă

Determinarea poziției navei

Poziția navei se află la intersecţia a două linii de poziţie generate de funcţionarea în comun a staţiei Master cu cel puţin două staţii Slave. Un caz particular de sistem hiperbolic de navigație este sistemul Loran.



Sistemele hiperbolice de navigaţie LORAN-C

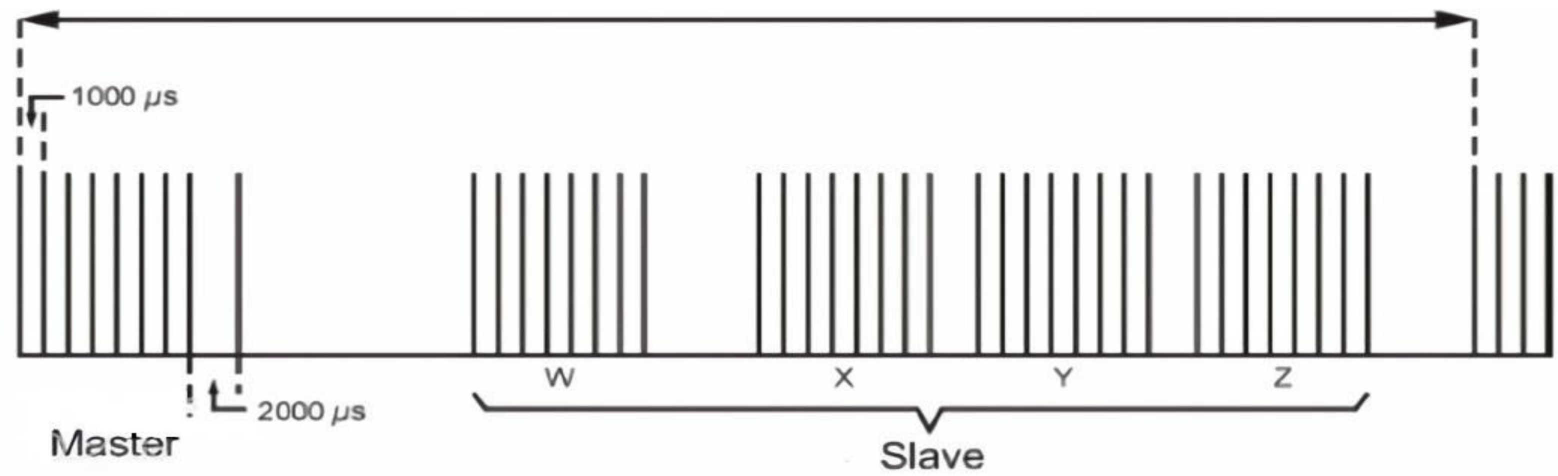
Sistemul LORAN – C este pus in aplicare în anul 2006 si este alcătuit din 23 de lanţuri care acoperă Oceanul Atlantic, Oceanul Pacific, Marea Chinei şi Marea Arabiei.

Sistemul este folosit în Statele Unite ale Americii încă din al doilea război mondial.

Fiecare lanţ LORAN – C este format dintr-o staţie Master şi până la patru staţii Slave, notate: W, X, Y, Z.

Semnalul LORAN-C

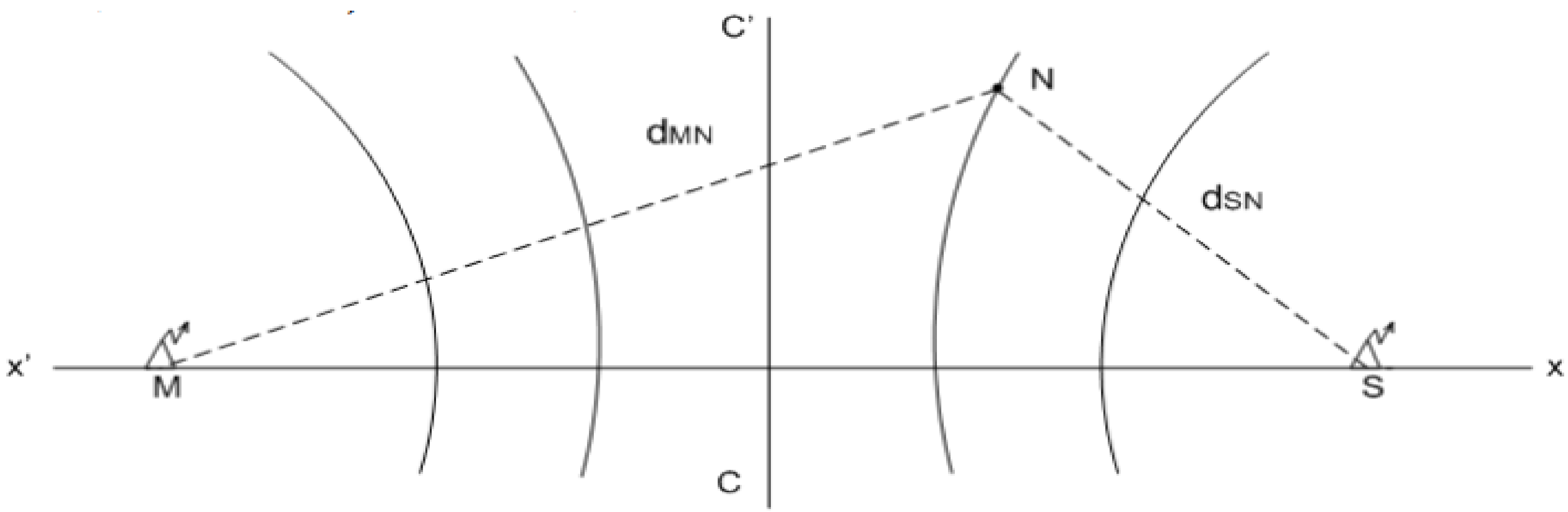
Impulsurile sunt recepţionate întotdeauna în ordinea din figură. Staţiile Slave emit un număr de 8 impulsuri la un interval de 1000 µsec, iar staţia Master emite al 9-lea impuls la 2000 µsec.



Teoria funcționării Loran

În sistemul de navigație Loran, hiperbola are proprietățile discutate anterior.

Presupunând că viteza de propagare a radiației este constantă, diferența de timp intre momentele de recepționare a undelor din cele două stații este proporțională cu distanța dintre fiecare loc de transmitere, creând astfel hiperbola pe suprafața pământului.



Într-adevăr, distanța este viteză x timp deci:

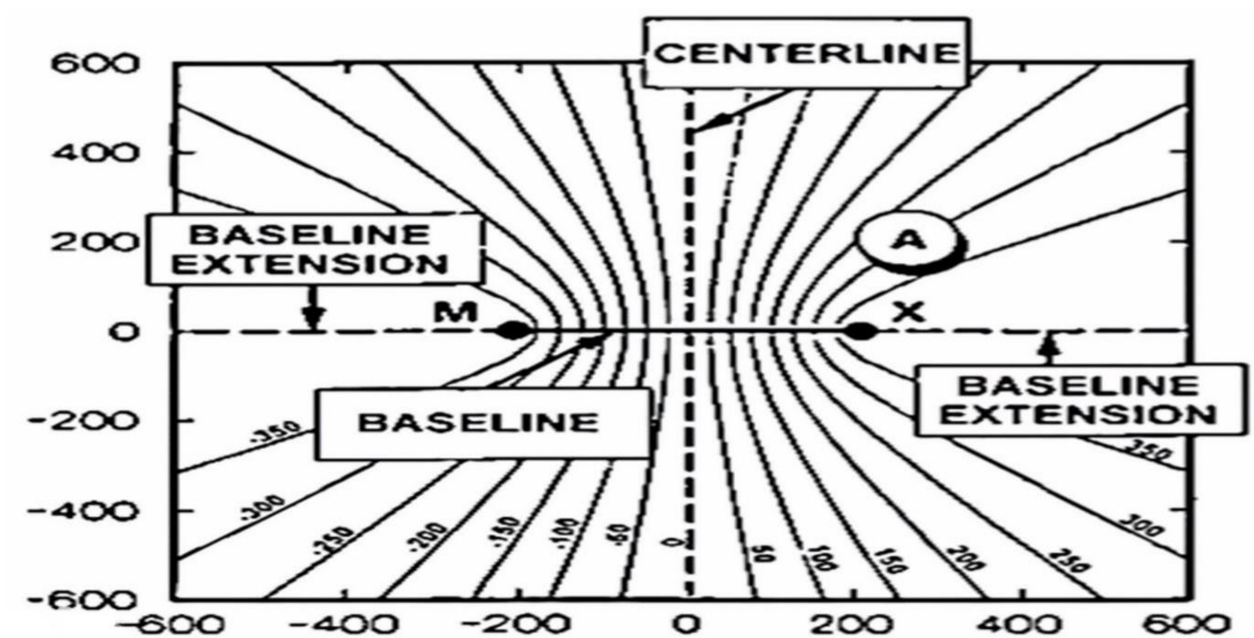
$$v = \frac{d_1}{t_1} \text{ si } v = \frac{d_2}{t_2}$$

$$\text{Astfel } v = \frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2} = \frac{d_1 - d_2}{t_1 - t_2}$$

$$\text{Cum } d_1 - d_2 = ct \text{ avem } t_1 - t_2 = \frac{d_1 - d_2}{v} = ct$$

Pentru a exemplifica modelul de funcționare a sistemului Loran considerăm următorul caz particular.

Fie $M(-200,0)$ stația principală, iar $X(200,0)$ stația secundară și observatorul capabil să detecteze radiațiile electromagnetice $A_{(x_A, y_A)}$.



Folosind formula distanței dintre două puncte, avem:

$$d(M,A) = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_A + 200)^2 + (y_A + 0)^2} = \sqrt{(x_A + 200)^2 + {y_A}^2}$$

Și $d(X,A) = \sqrt{(x_A - x_X)^2 + (y_A - y_X)^2} = \sqrt{(x_A - 200)^2 + {y_A}^2}$

Din definiția hiperbolei, diferența celor două distanțe este constantă, deci:

$$D = d(M,A) - d(X,A)$$
$$D = \sqrt{(x_A + 200)^2 + {y_A}^2} - \sqrt{(x_A - 200)^2 + {y_A}^2}$$

Cu stația principală și secundară în poziții geografice cunoscute, singurele necunoscute sunt cele două coordonate geografice ale observatorului.

Fie $A(271.9,200) \Rightarrow d(M,A) = \sqrt{(x_A + 200)^2 + {y_A}^2} = \sqrt{(271,9 + 200)^2 + 200^2} = 512.5$ NM

ce reprezintă distanța până la stația principală.

Fie $d(X,A) = \sqrt{(x_A - 200)^2 + {y_A}^2} = \sqrt{(271,9 - 200)^2 + 200^2} = 212.5$ NM

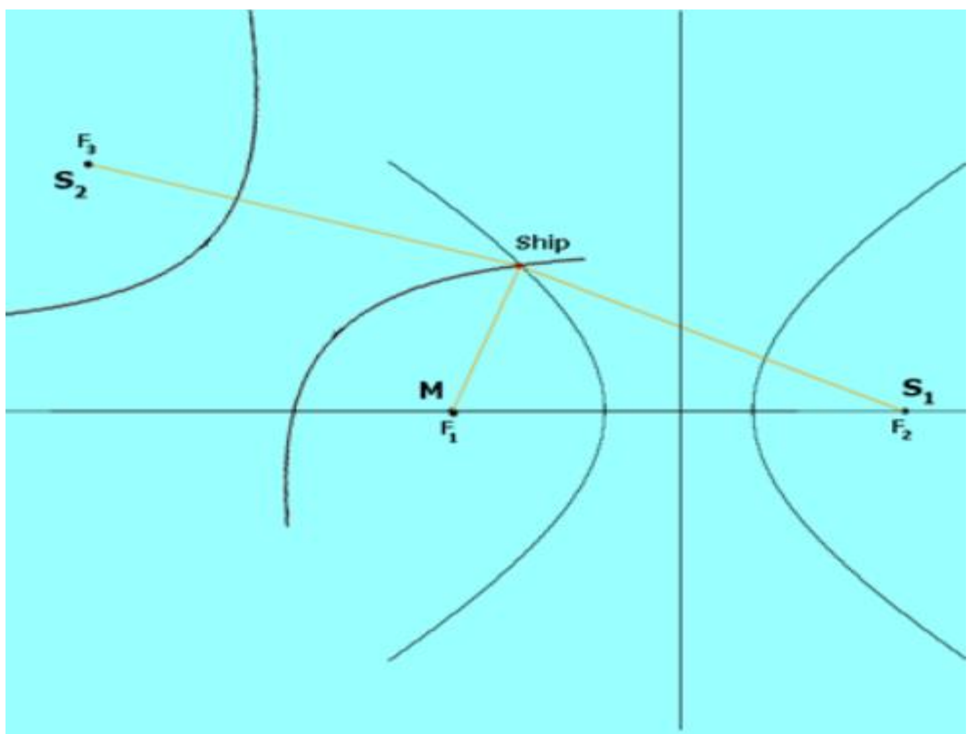
distanța până la stația secundară.

Distanța D este diferența dintre cele două astfel:

$$D = \sqrt{(271.9 + 200)^2 + 200^2} - \sqrt{(271.9 - 200)^2 + 200^2}$$

$$\Rightarrow D = 512.5 - 212.5 = 300\ NM$$

Să presupunem ca o altă stație secundară Y(500,50).



Fie $d(Y,A) = \sqrt{(x_A - 500)^2 + (y_A - 50)^2}$

Matematic, observatorul va avea două ecuații corespunzătoare perechilor $M - X$ și $M - Y$.

$$D_1 = d(M,A) - d(X,A) = \sqrt{(x_A + 200)^2 + {y_A}^2} - \sqrt{(x_A - 200)^2 + {y_A}^2}$$

$$D_2 = d(M,A) - d(Y,A) = \sqrt{(x_A + 200)^2 + {y_A}^2} - \sqrt{(x_A - 500)^2 + (y_A - 50)^2}$$

Presupunem că radiația electromagnetică se deplasează cu viteza luminii (o milă nautică in 6.18 µsec), iar $d(M, A) = 512.5$ NM. Pentru a călători de la stația principală la observatorul de la punctul A avem relația:

$$\frac{1}{v} \cdot d = t \Rightarrow 6.18\text{µsec}/NM \cdot 512.5NM = 3167\text{µsec}$$

La sosirea acestui semnal, observatorul Loran incepe sa măsoare timpul scurs până când nava primește semnalul de la stația secundară. Stația secundară emite semnalul cu o întarziere data de suma dintre timpul parcurgerii distanței D și timpul propriu de codare.

În exemplul nostru, distanța dintre stația principală și cea secundară este $D = 400NM$. Prin urmare, timpul necesar este:

$$t = \frac{1}{v} \cdot D = 6.18\text{µsec}/NM \cdot 512.5NM = 2472\text{µsec}$$

Presupunând că timpul de codare a semnalului stației secundare este de 11000µsec, obținem că aceasta va trimite semnalul după:

$$2472\text{µsec} + 11000\text{µsec} = 13472\text{µsec}$$

după ce trimite semnalul stația principală.

Acest semnal se propagă pe distanța de $212.5NM$ dintre X si A. Timpul necesar este:

$$t = 6.18\text{µsec}/NM \cdot 212.5NM = 1313\text{µsec}$$

Prin urmare, timpul total parcurs de la trimiterea semnalului de către stația principală până la receptor de către observatorul navei A este:

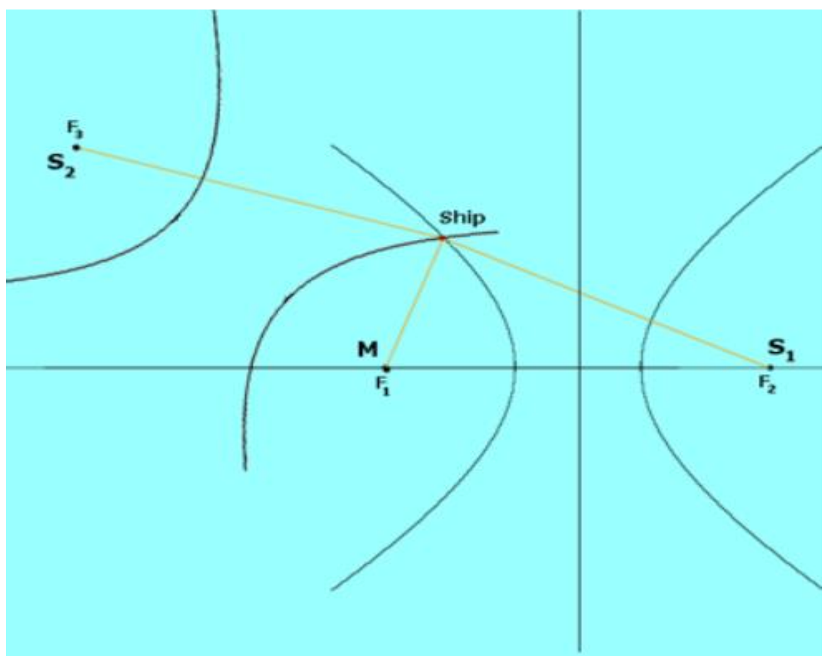
$$13472\text{µsec} + 1313\text{µsec} = 14785\text{µsec}$$

Ținem cont însă că receptorul din sistemul Loran masoară diferența de timp dintre primirea semnalului de la stația principală și secundară. Prin urmare, timpul anterior trebuie corectat prin scăderea timpului necesar pentru a parcurge distanța dintre stația principală și observatorul, adică 3167µsec.

Deci timpul final este:

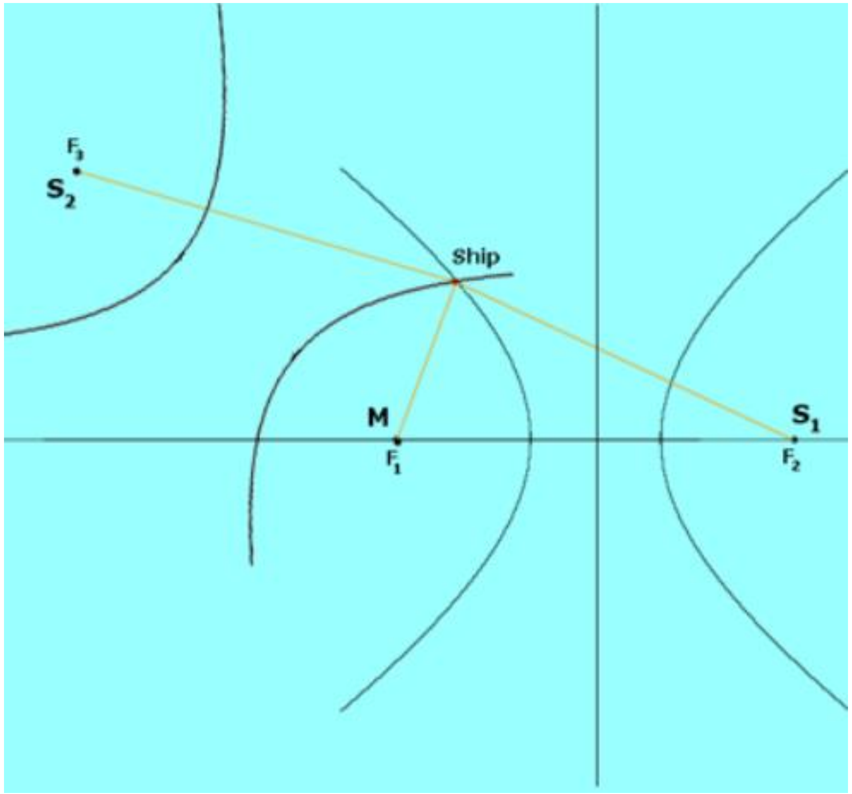
$$14785\mu sec - 3167\mu sec = 11618\mu sec$$

Acest timp va genera o linie de câmp hiperbolică și poate fi intersectată cu o altă linie de câmp hiperbolică pentru a determina exact poziția navei.

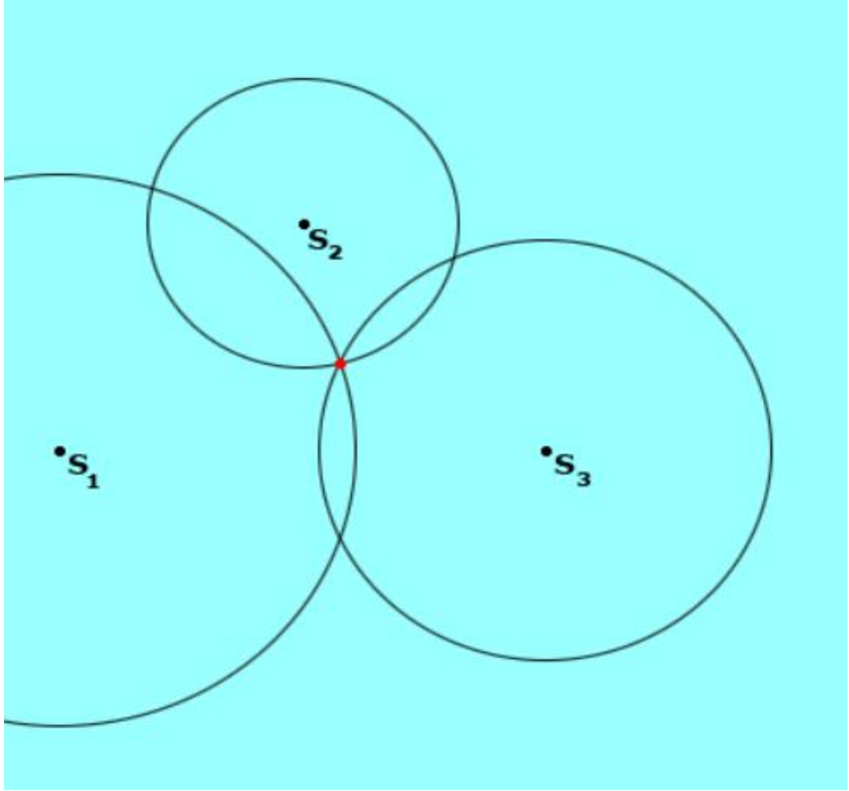


Navigația

Sistemul Loran



Sistemul de navigație GPS



L.P.Wapner, GPS navigation apps and the price of anarchy, The Mathematical Gazette, nr 104,2020, pp 235-240

Sistemul de navigație GPS

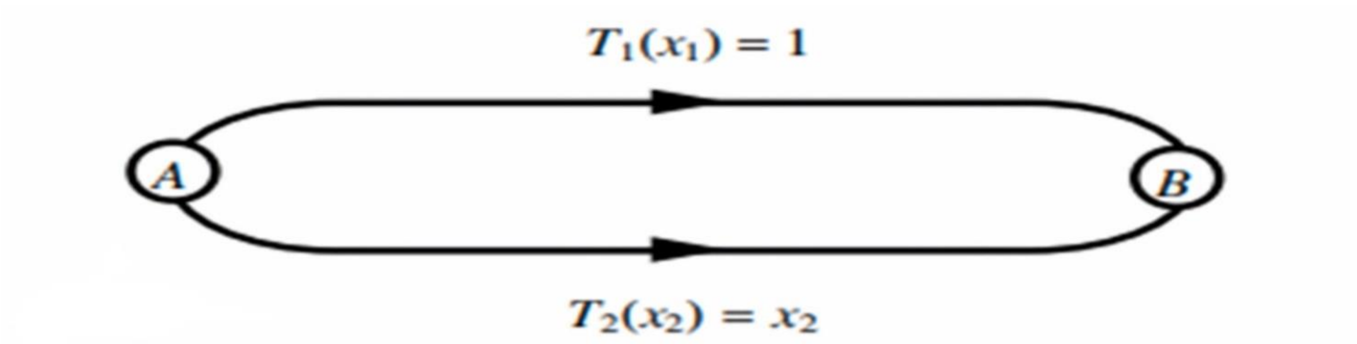
Dacă în trecut metodele de navigație se rezumau la harta pe hartie, in prezent le folosim pe cele digitale,Waze si Google Maps,ce direcționează soferii pe ruta cea mai scurtă.

Arthur Cecil Pigou a realizat un model matematic de navigație ce poate fi aplicat în zilele noastre. Drumul de la A la B poate fi parcurs pe două rute.

Notăm astfel x_1 procentul soferilor ce aleg drumul cu timp constant și $x_2 = 1 - x_1$ pentru cei ce aleg cealaltă rută în care timpul este influențat de trafic. Timpul de condus este:

$$T_1(x_1) = 1 \text{ și } T_2(x_2) = x_2$$

$$\Rightarrow T_m = x_1 T_1(x_1) + x_2 T_2(x_2) = x_1 \cdot 1 + (1 - x_1)(1 - x_1) = {x_1}^2 - x_1 + 1$$



Pentru ca soferii să reducă timpul de condus, aceștia vor alege egoist rutele,creând astfel echilibrul Nash, dar se vor păcăli singuri. Vrem să determinăm valoarea minimă a timpului mediu:

$$(T_m)' = 0 \Rightarrow ({x_1}^2 - x_1 + 1)' = 0 \Rightarrow 2x_1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow T_m = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Astfel timpul este mai scurt când șoferii nu utilizează aplicații deoarece probabilitatea de alegere a rutei va fi de 50% ceea ce rezultă că $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ deci timpul mediu va fi egal cu timpul minim de condus.

Discrepanța celor doi timpi medii de conducere este cunoscută ca “The Price of Anarchy”:

$$PoA = 1 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

Mai grav este în cazul în care timpul drumului mai scurt variază, în funcție de traficul drumului, ca o putere a lui x_2. Dacă alegem în continuare constanta de variație 1, atunci:

$$T_2(x_2) = {x_2}^{\mathrm{p}}, p > 0.$$

Pentru a simplifica notația, fie $x = x_2$.

$$T_m = x_1 T_1(x_1) + x_2 T_2(x_2) = (1 - x_2) \cdot 1 + x_2 \cdot x_2^{\mathrm{p}}$$
$$= x_2 \cdot x_2^{\mathrm{p}} - x_2 + 1$$

$$(T_m)' = 0 \Rightarrow (x_2 \cdot x_2^{\mathrm{p}} - x_2 + 1)' = 0$$

$$\Rightarrow x_2^{\mathrm{p}}(p + 1) - 1 = 0 \Rightarrow x_2^{\mathrm{p}} = \frac{1}{(\mathrm{p} + 1)} \Rightarrow x_2 = (p+1)^{\frac{-1}{p}}$$

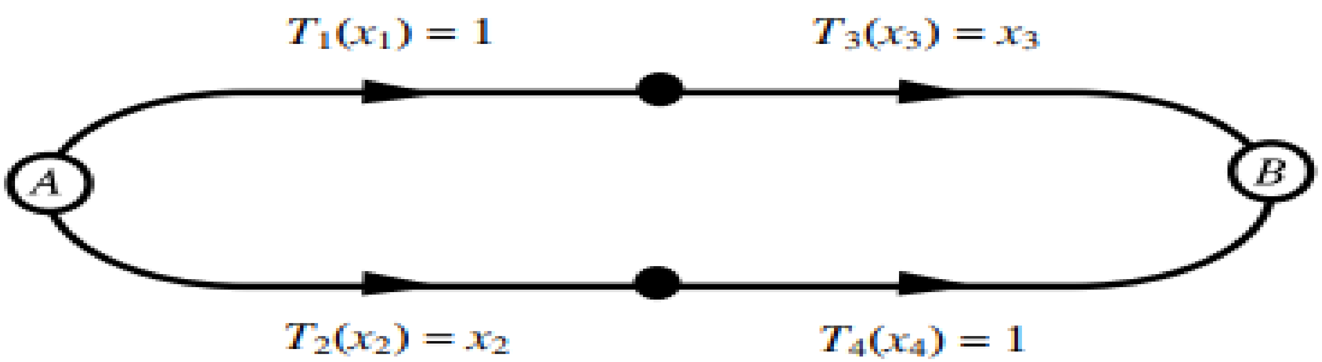
Deci, valoarea minimă a lui T_m este:

$$T_m = 1 - (p+1)^{\frac{-1}{p}} + [(p+1)^{\frac{-1}{p}}]^{p+1}$$

Paradoxul lui Braess se aplică exemplului lui Pigou iar fiecare rută se împarte în două segmente astfel $x_1 = x_3$ și $x_2 = x_4$.

$$T_m = x_1 T_1(x_1) + x_3 T_3(x_3) + x_2 T_2(x_2) + x_4 T_4(x_4)$$

$$T_m = x_1 + x_3 + x_2 + x_4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2$$



Dacă înlocuim obținem:

$$T_m = 1 - 2x_2 + {x_2}^2 + 1 - x_2 + {x_2}^2 + x_2 = 2{x_2}^2 - 2x_2$$

$$(T_m)' = (4x_2 - 2)' = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

Astfel timpul mediu este:

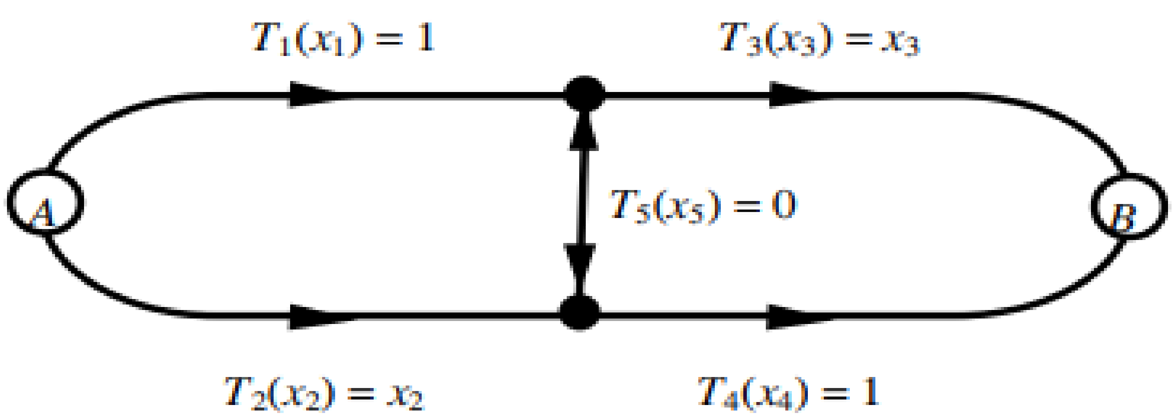
$$T_m = \frac{1}{2} - 1 + 2 = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}$$

O altă situație este cea in care este prezentată șoferilor o rută de legătură între cele două drumuri, în care timpul de parcurgere este foarte scurt $T_5(x_5) = 0$. Șoferii gândind egoist, o să se aplice echilibrul Nash, iar timpul total devine $1 + 1 = 2$ ore.

$$x_1 + x_3 + x_2 + x_4 = 2$$

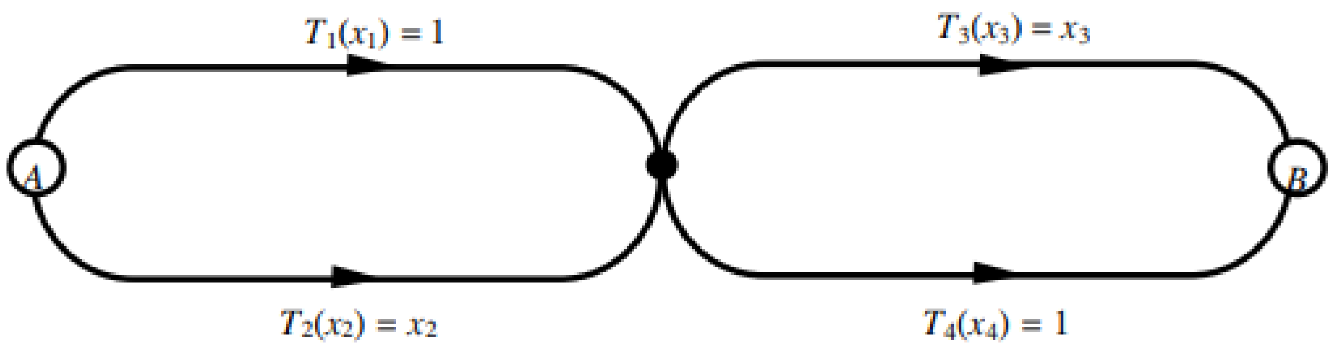
$$T_m = x_1 T_1(x_1) + x_3 T_3(x_3) + x_2 T_2(x_2) + x_4 T_4(x_4)$$

$$T_m = x_1 + {x_3}^2 + x_2 + {x_4}^2$$



Deoarece numărul de mașini din A sunt egale cu cele din B:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 - x_2 \; si \; x_3 = 1 - x_4$$



Și încă o dată reiese din primul exemplu a lui Pigou unde avem $PoA = \frac{4}{3}$ că mai multe surse de informații în legătură cu traficul, vor rezulta la timp mai mare in trafic. Daca nodul este înlocuit sau nu mai este indentificat pe aplicație de către soferi, timpul mediu de condus o să scadă la $1\frac{1}{2}$ ore, timpul mediu minim.

Bibliografie

The American Practical Navigator, 2002 Bicentinnial edition, Ed.National Imagery and Mapping Agency

L.P.Wapner, GPS navigation apps and the price of anarchy, The Mathematical Gazette, nr 104,2020, pp 235-240

curs-sisteme-integrate-de-navigatie-pdf

thenauticalalmanac.com

mathcentral.uregina.ca

Vă mulțumesc!