Geometria câmpului gravitațional constant

Wladimir-Georges Boskoff

De unde provine câmpul gravitațional constant?

$$F = G\,\frac{mM}{r^2}$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/Kg$

constanta gravitațională (universală)

Dacă corpul de masă m este atras gravitațional de Pământ, conform principiului II

$$\cancel{m}\cdot g = F = G\frac{\cancel{m}M}{R^2}$$

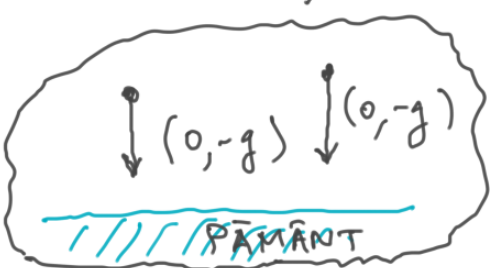
forța gravitațională la suprafața Pământului

unde R = raza Pământului, $\approx 6.4\cdot 10^{6}\ m$

M = masa Pământului $\approx 6\cdot 10^{24}\ Kg$

G = c.g.u. $\approx 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{Kg\cdot s^2}$

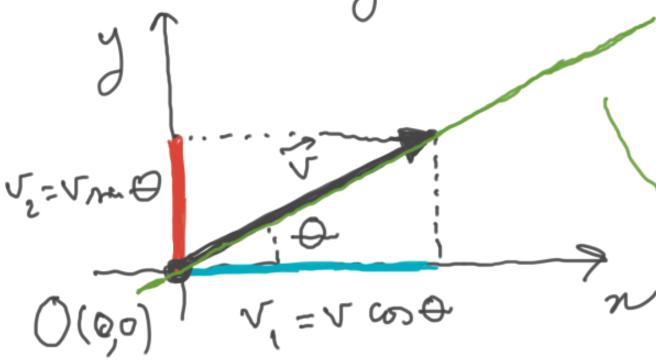
$\Longrightarrow$



$$g = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{(6{,}4)^2\cdot 10^{12}}\left(\frac{\frac{m^3}{Kg\cdot s^2}\cdot Kg}{m^2}\right) \approx 9{,}8\ m/s^2$$

Dacă $\vec{F} = (0,0)$ atunci $\vec{F} = m\vec{a} \iff (0,0) = m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$

$$\iff \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\dot{y}(0)=v_2]{\dot{x}(0)=v_1} \begin{cases} \dot{x}(t) = v_1 \\ \dot{y}(t) = v_2 \end{cases} \xrightarrow[y(0)=0]{x(0)=0} \begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t \end{cases} \implies$$



$$\implies \boxed{y = \frac{v_2}{v_1} x}$$

traiectoria unui punct material în cazul în care asupra lui NU acționează nicio forță.

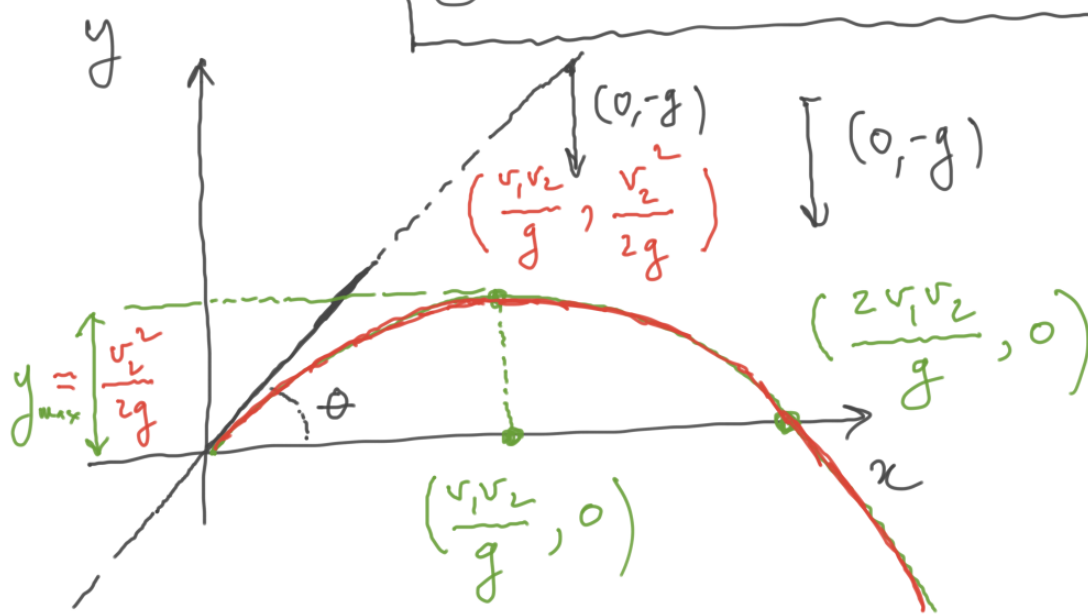
Care va fi însă traiectoria punctului material în cazul în care asupra lui acționează forța generată de câmpul gravitațional constant $\vec{g} = (0,-g)$?

$$\implies m\vec{g} = (0, -mg) = m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases} \xrightarrow[\dot{y}(0) = v_2]{\dot{x}(0) = v_1} \begin{cases} \dot{x}(t) = v_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + v_2 \end{cases} \xrightarrow[y(0)=0]{x(0)=0} \begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_2 t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2v_1^2} x^2 + \frac{v_2}{v_1} x}$$

traiectoria este o parabolă



deci, în prezența câmpului gravitațional constant dreapta de ecuație

$$\boxed{y = \frac{v_2}{v_1} x}$$

parabole

$$\boxed{y = -\frac{g}{2v_1^2} x^2 + \frac{v_2}{v_1} x}$$

(T) Fie $L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = E_c(\dot{x},\dot{y}) - E_p(x,y) = m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} - E_p(x,y)$

Ecuațiile Euler-Lagrange
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$
(principiul II)

(T) Ecuațiile Euler-Lagrange sunt ecuațiile geodezicelor metricii
$$ds^2 = L\,dt^2$$

Obs. In cazul $\vec{F} = (0,0)$, $E_c = m\cdot\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}$; $E_p = 0$

deci $L = E_c - E_p$. Metrica este

$$\boxed{ds^2 = \frac{m}{2}dx^2 + \frac{m}{2}dy^2} \dashrightarrow \Gamma^i_{jk} = 0 \text{ (toți)}$$

$\Longrightarrow$ ec. geodezicelor sunt $\left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \end{array}\right.$ ~ coincide cu ec. (E-L).

. . . . Apl.

Considerăm metrica $\boxed{ds^2 = \frac{m}{2}(dx^2+dy^2) - mg\,y\,dt^2}$

dedusă folosind E_c și $E_p = mgy$. Notăm $x =: x^1, y =: x^2$ și $t =: x^3$

$$\boxed{ds^2 = \frac{m}{2}\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2\right) - mg\,x^2 (dx^3)^2}$$

$$\Longrightarrow \exists \text{ numai } \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -mg \Longrightarrow \begin{cases} \Gamma_{32,3} = \Gamma_{23,3} = -\frac{1}{2}mg \\ \Gamma_{33,2} = \frac{1}{2}mg \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Gamma^2_{33} = g^{22}\,\Gamma_{33,2} = g} \text{ și } \boxed{\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2y}} \Longrightarrow$$

ec. geodezicelor devin

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} + g(\dot{t})^2 = 0 \\ \ddot{t} + \frac{1}{y}\dot{y}\dot{t} = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\ddot{y}\,y^2 + a^2 = 0}$$

$(\dot{t})^2 = 1 \Rightarrow \ddot{t} = 0 \Rightarrow$

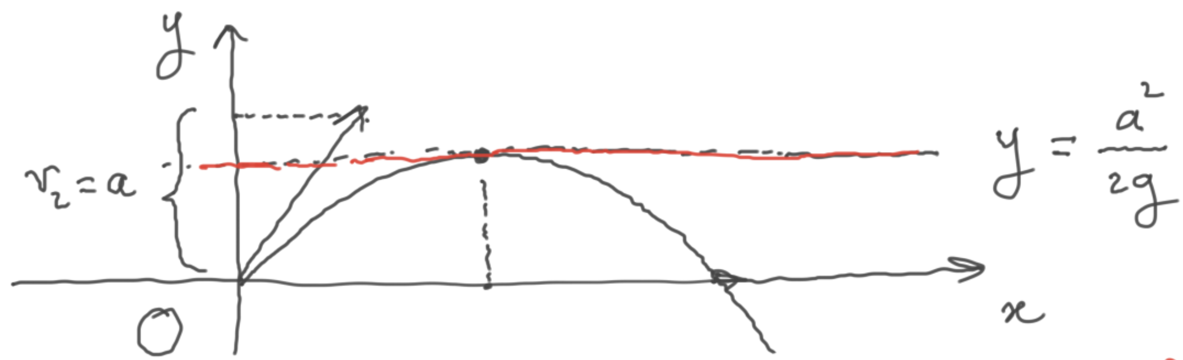
$\dot{y} = 0 \Rightarrow \boxed{y = \text{const}}$

$\boxed{\ddot{y} + g = 0}$

ok

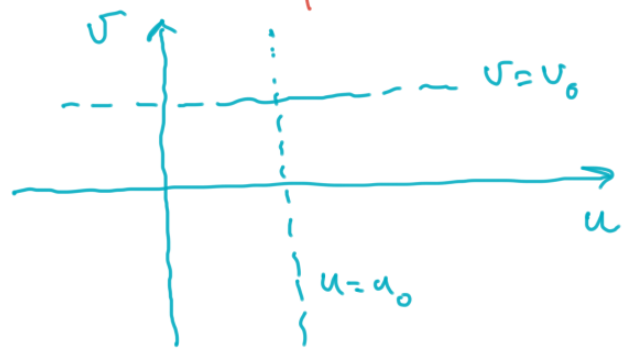
$$\boxed{\text{Deci această metrică sugerată de un Lagrangian mecanic nu descrie geometric câmpul gravitațional constant}}$$

Vom nota $v_2 = a$ și vom ține cont că $v_2^2 - 2gy > 0$.



Vom face o transformare de coordonate de forma

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,x + \dfrac{1}{g\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - 2gy} \\[2ex] v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,x - \dfrac{1}{g\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - 2gy} \end{cases}$$



Dreptele $u=u_0$ și $v=v_0$ se transformă în parabole.

O dreaptă de forma $\boxed{ds^2=du^2+dv^2}$ ...

$$Au+Bv+C=0$$ se va transforma în general

într-o parabolă de forma $Ay+Bx^2+Cx+D=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{2}}dx - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-2gy}}dy \\ dv = \frac{1}{\sqrt{2}}dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-2gy}}dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2=du^2+dv^2}$$ se transformă în

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = dx^2 + \frac{1}{a^2-2gy}dy^2}$$

$; \ y < \frac{a^2}{2g}$

această metrică are signatura $(+,+)$ pentru toate traiectoriile

Avem numai $\Gamma^2_{22} \neq 0$, restul $\Gamma^i_{jk} = 0$.

$$\Gamma^2_{22} = g^{22} \cdot \Gamma_{22,2} = (a^2 - 2gy) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial y} = \frac{g}{a^2 - 2gy}$$

$\Longrightarrow$ ec. geodezicelor sunt $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \Gamma^2_{22} \cdot (\dot{y})^2 = 0 \end{cases}$ adică

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{g}{a^2 - 2gy} (\dot{y})^2 = 0 \end{cases}.$$

Observăm că $y(\tau) = -\frac{g}{2}\tau^2 + a\tau$ conduce la $\dot{y}(\tau) = -g\tau + a$ și $\ddot{y} = -g$, deci

$$-g + \frac{g}{a^2 - 2g\left(-\frac{g}{2}\tau^2 + a\tau\right)} (-g\tau + a)^2 = 0.$$

Gândim $a = v \sin\theta \Longrightarrow \dot{x}(0) = v\cos\theta = v_1$. Dacă $x(0) = y(0) = 0$

ecuațiile geodeticelor conduc la curba

$$y = -\frac{g}{2v_1^2}x^2 + \frac{v_2}{v_1}x .$$

CONCLUZII transformările parabolice

$$\boxed{\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{g\sqrt{2}}\sqrt{a^2-2gy} \\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{g\sqrt{2}}\sqrt{a^2-2gy} \end{cases}}$$

ale planului Euclidian conduc la metrica

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + \frac{1}{a^2-2gy}dy^2}$$

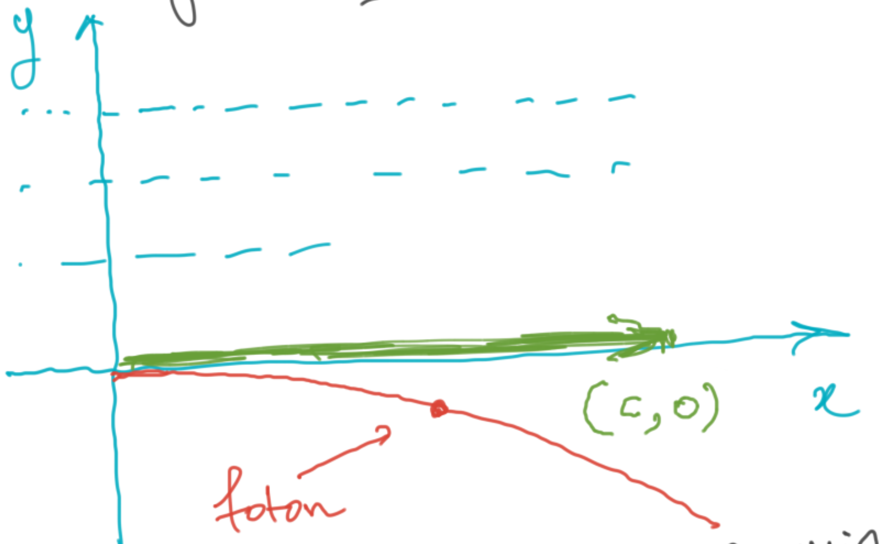
care descrie Geometria câmpului gravitațional constant. Mișcarea în câmp gravitațional constant regeometrizează planul Euclidian.

$d \longrightarrow$ parabole

$$\Longrightarrow L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \dot{x}^2 + \frac{1}{a^2-2gy}\cdot\dot{y}^2$$

$\dashrightarrow$ nu este mecanic!

- Ce se întâmplă cu razele de lumină în câmp gravitațional constant în acest context??



O să considerăm un foton care inițial pleacă din punctul $O(0,0)$ cu viteza $\vec{v} = (c, 0)$, deci $\boxed{a = 0}$.

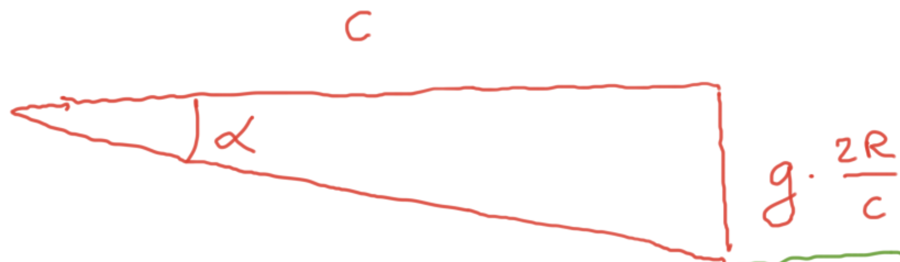
$$\Longrightarrow \boxed{ds^2 = dx^2 - \frac{1}{2gy} dy^2}$$

curba pe care se va mișca fotonul este obținută pentru $v = v_1 = c$, $v_2 = 0$.

$$p(t) = \left(ct, -\frac{g}{2} t^2\right)$$

$\Longrightarrow \dot{p}(t) = (c, -gt)$. Influența câmpului gravitațional constant se simte pe o porțiune cât diametrul Pământului, adică timp de $\frac{2R}{c} \Longrightarrow$

$\tau_0 = \frac{2R}{c}$ (căci $\tau_0 \cdot c = 2R$)



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2gR}{c^2}$ ·····> $\boxed{g = \frac{GM}{R^2}}$ ----> $\alpha \approx \frac{2GM}{R^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{R}}{c^2}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2GM}{Rc^2}}$ → Această valoare =" cu cea obținută în mec. Newtoniană clasică și - TRR.

$$\alpha = \frac{2 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ m}{9 \cdot 10^{16}\ m^2/s^2} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-9} \text{ radiani}$$

$$\alpha = 1{,}4 \cdot 10^{-9} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \times \frac{60'}{\text{grade}} \times \frac{60''}{\text{minute}} = 2{,}88 \times 10^{-4} \text{ secunde de arc}$$

✓ (1,75'' arc)

Appendix 1

În formularea Mecanicii Lagrangiene se propune introducerea unei funcții $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = E_c - E_p$ pentru care ecuațiile Euler-Lagrange

$$
(E\text{-}L)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \vec{F} = m\vec{a}
$$

. . . .

În cazul problemei noastre $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) := m\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - mgy$

și ec. E-L sunt

$$
\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) + g = 0. \end{cases} \iff (\ddot{x}, \ddot{y}) = (0, -g)
$$

$$
\vec{F} = \cancel{m}(\ddot{x}, \ddot{y}) = \cancel{m}(0, -g)
$$

Totuși, geometrizarea spațiului propusă de metrica $ds^2 = L\,dt^2$ nu funcționează !! (datorită variabilei suplimentare apărute în metrică)

Appendix 2

$$\overset{n=2}{ds^2 = g_{ij}(x,y)\, dx^i x^j}$$

$x = x^1;\ y = x^2$

curbele $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \quad \ldots \quad \Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$$

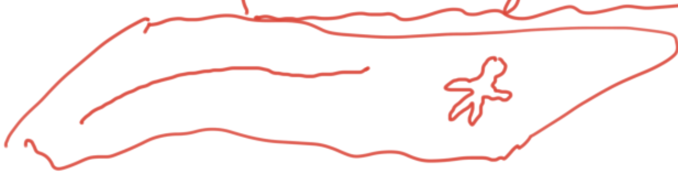
$$\Gamma^i_{jk} = g^{is}\,\Gamma_{jk,s} = g^{i1}\,\Gamma_{jk,1} + g^{i2}\,\Gamma_{jk,2} \quad \ldots \quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$$

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{jk}$$

$$R_{ijkl} = g_{is}\,R^s_{jkl} = g_{i1}\,R^1_{jkl} + g_{i2}\,R^2_{jkl}$$

$$\boxed{\ddot{x}^i(t) + \Gamma^i_{jk}\cdot \dot{x}^j(t)\,\dot{x}^k(t) = 0\ , \quad i = \overline{1,2}}$$

ecuațiile geodezicelor (dreptelor)



Th. Egregium Gauss

$$\left(U = \mathring{U},\ ds^2\right)$$
$$(x^1, x^2)$$

IMAGINEA CELOR 1000 de cuvinte

inițial $\boxed{ds^2 = du^2 + dv^2}$

(dacă nu se întâmplă nimic)