Asupra seriei $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$, *unde* $\mathcal{P}$ *este mulțimea tuturor numerelor naturale prime.*

Adriana Bardaș, anul II, Universitatea Ovidius

Vom menționa următorul rezultat:

Euclid a demonstrat că mulțimea $\mathcal{P}$ a numerelor prime este infinită.

Demonstrația lui Erdos folosind estimări inferioare și superioare

Fie $p_i =$ cel de-al i-lea număr prim. Presupunem că suma inverselor numerelor prime converge $\implies \exists\ k > 0$, cel mai mic, astfel încât

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2} \ (1)$$

Fie $x \in \mathbb{N}^*$.
Notăm $M_x = \{n \in \{1, 2, ..., x\} : \forall j \geq k + 1$, n nu este divizibil cu $p_j\}$.
$\iff \forall n \in M_x,\ n \leq x \text{ și } n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, cu $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Estimarea superioară

$\forall\ n \in M_x, n = m^2 r,\ m, r \in \mathbb{N}$ și r este liber de pătrate.

Cum doar $p_1 ... p_k$ pot apărea cu exponentul 1 în factorizarea primă a lui r, sunt cel mult 2^k posibilități diferite pentru r.

Mai mult, sunt cel mult $\sqrt{x}$ posibile valori pentru m. ($n = m^2 r$ și cum $r \geq 1$, atunci $n \geq m^2 \implies m \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{x}$).
Așadar,

$$|M_x| \leq 2^k \sqrt{x}. \ (2)$$

Estimarea inferioară

Restul de $x - |M_x|$ numere din $\{1, 2, ..., x\} \setminus M_x$ sunt toate divizibile cu un număr prim $> p_k$.
Fie i $\geq$ k+1 și notăm $N_{i,x} = \{n \in \{1, 2, ..., x\} : n$ este divizibil cu $p_i\}$. Atunci:

$$\{1, 2, ..., x\} \setminus M_x = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} N_{i,x}.$$

Cum numărul de întregi din $N_{i,x}$ este cel mult $\frac{x}{p_i}$ (chiar 0, pentru $p_i > x$), avem:

$$x - |M_x| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |N_{i,x}| < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{x}{p_i}$$

Folosind relația (1),

$$x-|M_x| < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{x}{p_i} < \frac{x}{2}\text{ , pentru că } \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2} \implies x-|M_x| < \frac{x}{2}$$

$$\implies |M_x| > x - \frac{x}{2} \iff |M_x| > \frac{x}{2}.$$

Așadar,

$$\frac{x}{2} < |M_x|. \ (3)$$

Relația (2) și relația (3) nu pot fi ambele adevărate, pentru că am avea $\frac{x}{2} < |M_x| \leq 2^k\sqrt{x}$ și deci

$$\frac{x}{2} < 2^k\sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Pentru $x = 2^{2k+2}$ deducem că
$2^{2k+1} < 2^{2k+1}$ *fals* $\implies$ *contradicție*).

Bibliografie

Am folosit demonstrația lui Paul Erdős de pe următorul site:
Click me