

Probleme de numărare

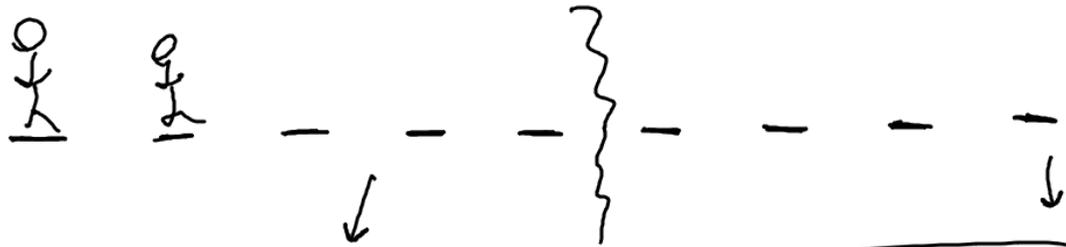
Permutare: Ce este o permutare? : $P_n \rightarrow$ nr. de permutări pt. $\{1, 2, \dots, n\}$

$\rightarrow 1$	2	3	$\rightarrow 3$	2	1
$\rightarrow 2$	1	3	$\rightarrow 2$	3	1
$\rightarrow 3$	1	2	$\rightarrow 1$	3	2

6 permutări / enumerări
 $\hat{=} P_3$

$$P_n = n! \quad (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots)$$

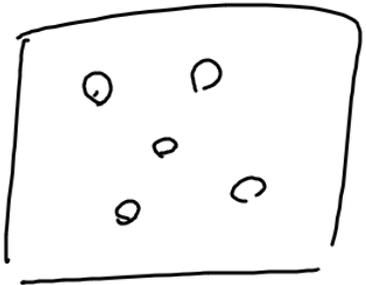
A_1 clasa \rightarrow 24 elevi \rightarrow 10 elevi joacă fotbal



$\rightarrow P_{10} = 10!$ modalități de a așeza elevii în linie dreaptă

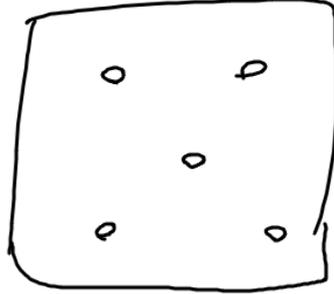
Câte echipe pot fi formate?

În câte modalități putem așeza cei 10 jucători în 2 echipe?



E_1

Alegerea?



E_2

\hookrightarrow Care este alegerea pe care vrem să o facem?
 \hookrightarrow

Vrem să alegem 5 jucători din 10. *

$$\text{Alegem } h \text{ jucători din } m = \boxed{C_m^h = \frac{m!}{h!(m-h)!}}$$

$$\text{Dacă ordinea contează: alegem } h \text{ jucători din } m: \boxed{A_m^h = \frac{m!}{(m-h)!}}$$

* : Nu contează ordinea în echipă.

$$\Rightarrow C_{10}^5 = \frac{\cancel{10}!}{\cancel{5}! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 42 = 252 \text{ modalități}$$

Se pot forma 252 de echipe de fotbal.

A_3 6 jucători $\begin{cases} E_1: \text{portar, atacant, fundas,} \\ E_2: \text{portar, atacant, fundas,} \end{cases}$

Ordinea contează !! (un jucător poate avea mai multe roluri)

$$L, A_6^3 = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot 4}{\cancel{3!}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{120 \text{ modalități}}$$

Se pot forma 120 de echipe.

A₄ 30 elevi → comitet de 4 elevi

Par I : Care este alegerea? → Alegem 4 din 30.

Par II : Ordinea contează? → NU! $C_{30}^4 = \frac{30!}{4! \cdot 26!} = (\dots)$

A₅ 30 elevi → comitet de 4 elevi

- ↳ Președinte
- ↳ Vice-președinte
- ↳ Secretar
- ↳ Contabil

$$A_{30}^4 = \frac{30!}{26!} = (\dots)$$

$$\begin{aligned}
 \binom{8}{10} &= \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \binom{2}{10} \\
 \frac{10!}{8! \cdot (10-8)!} & \quad \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!}
 \end{aligned}$$

$$\binom{k}{n} = \binom{n-k}{n}$$

ex: $\binom{9}{10} = \binom{1}{10}$

$$A_n^h \stackrel{?}{=} A_n^{n-h}$$

$$A_n^h = \frac{n!}{(n-h)!}$$

$$A_n^{n-h} = \frac{n!}{\underbrace{(n-(n-h))!}_{=h!}} = \frac{n!}{h!}$$

Probleme

$$\textcircled{1} A_4^4 + \underbrace{C_4^4}_{=1} = 4! + 1 = 24 + 1 = \boxed{25}$$

$$C_4^4 = \frac{4!}{4! \cdot \underbrace{0!}_{=1}} = 1$$

$$A_4^4 = \frac{4!}{\underbrace{0!}_{=1}} = 4! (= P_4)$$

$$C_{10}^{10} = \underline{C_{10}^0} = 1$$

$$A_{10}^0 = \frac{10!}{10!} = 1$$

$$A_{10}^{10} = \frac{10!}{0!} = 10! = P_{10}$$

$$\textcircled{2} \quad \binom{0}{n} + \binom{1}{n} + \binom{2}{n} + \dots + \binom{n-1}{n} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$n=3$$

$$\binom{0}{3} + \binom{1}{3} + \binom{2}{3} + \binom{3}{3} = 2 + 2 \binom{1}{3} = 2 + 2 \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{3!}}}{\underset{=1}{2!} \cdot \underset{=1}{1!}} = 2 + 2 \cdot 3 = 8 = \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \quad \binom{9}{10} - \binom{8}{9} = \binom{1}{10} - \binom{1}{9} = 10 - 9 = 1$$

$$\binom{1}{3} = 3$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{m!}{12} = (m-2)! \quad , \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2 \quad ; \quad m = ?$$

$$m! = 12(m-2)! \Rightarrow \underline{m! - 12(m-2)! = 0} \Rightarrow \underline{m(m-1)(m-2)! - 12(m-2)! = 0}$$

$$\underbrace{(m-2)!}_{\stackrel{?}{=} 0} \underbrace{(m(m-1) - 12)}_{\stackrel{!}{=} 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad m(m-1) = 12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m=4} \quad (4 \cdot 3 = 12)$$

$$x! \neq 0$$

$$\textcircled{5} \quad C_{m+2}^1 + \frac{\cancel{(m+2)!}^{m+2}}{\cancel{(m+1)!}^1} = m^2 + 5, m \in \mathbb{N}$$

$$m+2 + m+2 = m^2 + 5 \Rightarrow 2m+4 = m^2 + 5 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

Parasão: $\boxed{13:10}$ ∇ ∇

Probleme

$$\textcircled{5} \quad \underbrace{C_m^1} + \underbrace{A_m^2} = 4, \quad \underbrace{m \in \mathbb{N}}, \quad \underbrace{m \geq 2}; \quad m = ?$$
$$= m \quad = m(m-1)$$

$$\Rightarrow m + m(m-1) = 4 \Rightarrow m(1+m-1) = 4 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{2! + 3!}{C_8^2} = \frac{2 + 6}{\frac{8!}{8 \cdot 7}} = \frac{8^2}{4 \cdot 7} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

$$\textcircled{7} \binom{2}{m} = \binom{1}{m} + 2, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \underline{m \geq 2}.$$

$$\frac{m(m-1)}{2} \stackrel{2}{=} \stackrel{2}{=} m+2 \Rightarrow m^2 - m = 2m + 4 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$\Delta = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -1 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{m=4}$$

⑧ 2 profesori / 100 elevi



{ 1 profesor M-I
1 profesor MA

↳ Locuri disponibile ↵

Se învârn 78 elevi la MA și 173 elevi la M-I.

În câte moduri putem alege cei 40 de elevi la MA? $\rightarrow \boxed{\begin{matrix} 40 \\ C \\ 78 \end{matrix}}$

_____ || _____ Cote elevi la M-I? $\rightarrow \boxed{\begin{matrix} 60 \\ C \\ 173 \end{matrix}}$

⑨ $M = \{1, 2, 3, \dots, 11\} \rightarrow 11$ sportivi

Comitet \rightarrow alege un număr de sportivi (5 / 11 / 0 / ...).

În câte moduri poate alege comitetul?

Câți sportivi alege comitetul? : 0, 1, 2, ..., 11

⑩ : Alegem 0 sportivi din 11 : C_{11}^0

⑪ : Alegem 1 sportiv din 11 : C_{11}^1

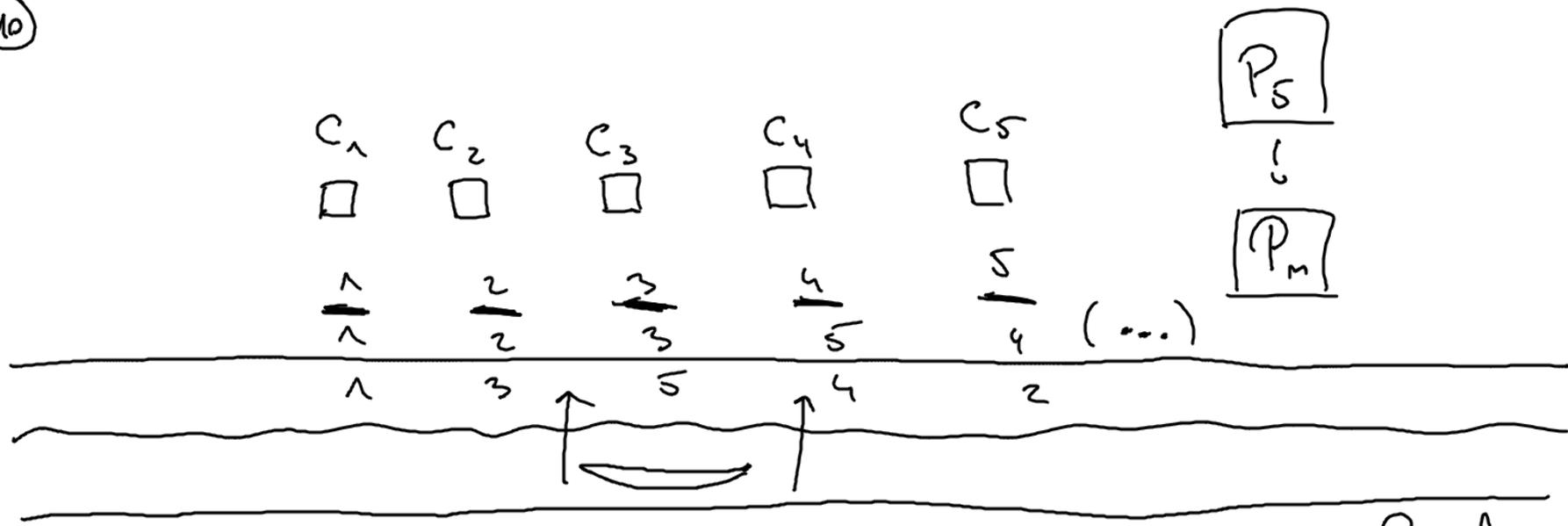
⑫ : Alegem 2 sportivi din 11 : C_{11}^2

⑬ : Alegem 11 sportivi din 11 : C_{11}^{11}

$$\textcircled{+} C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + \dots + C_{11}^{11} = 2^{11} = \boxed{2048}$$

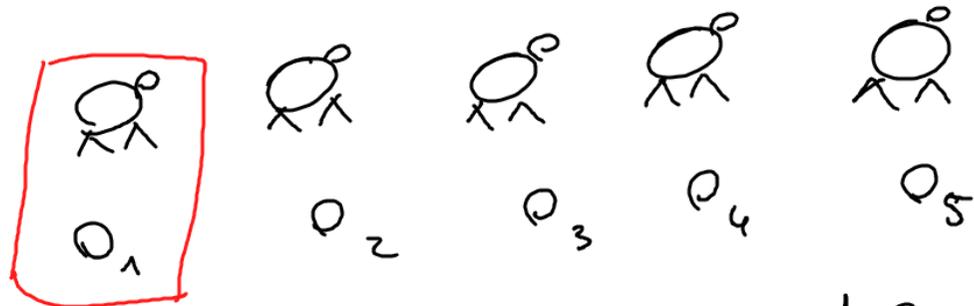
Sportivi pot fi aleși în 2048 de moduri.

10



Reguli

- ① Fiecare oare merge într-o canoa.
- ② Nu putem avea 2 si în aceeași canoa.



În câte moduri pot acuma să își găsească o canoa?

$O_1 \rightarrow \hat{I}_m$ câte cămăși poate merge via O_1 ? $\rightarrow \textcircled{5}$

$O_2 \rightarrow \textcircled{4}$

$O_3 \rightarrow \textcircled{3}$

$O_4 \rightarrow \textcircled{2}$

$O_5 \rightarrow \textcircled{1}$

$$\textcircled{0} : 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = \textcircled{P_5} (= 120)$$

⑪ Aceeași problemă

Reguli:

5 oi; 5 cântec

① Fiecare oie merge într-o cântec.

Putem avea oricâte oi într-o cântec.

$$\boxed{5^5}$$

m oi

h care

Număr modalități: $\boxed{h^m}$

$$O_1 \rightarrow h$$

$$O_2 \rightarrow h$$

$$O_m \rightarrow h$$

$$\underbrace{h \cdot h \cdot \dots \cdot h}_{m \text{ oi}} = h^m$$

$$O_1 \rightarrow \textcircled{5}$$

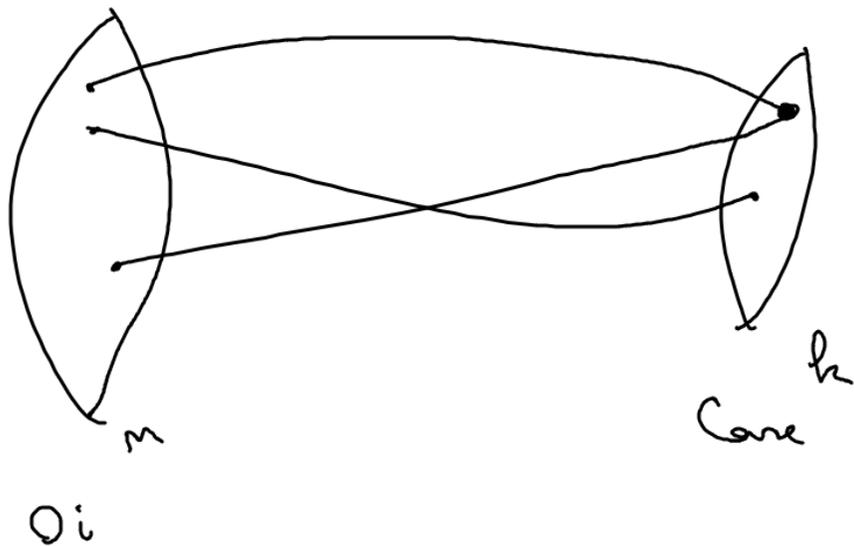
$$O_2 \rightarrow \textcircled{5}$$

$$O_3 \rightarrow \textcircled{5}$$

$$O_4 \rightarrow \textcircled{5}$$

$$O_5 \rightarrow \textcircled{5}$$

① 5^5 modalități



Aranjare \leftrightarrow Funcții

Câte funcții există de la O_i la $Cora h$?

$$\rightarrow \boxed{h^m \text{ funcții}}$$

$$\textcircled{12} \quad 5m! + (m+1)! = 40(m-1)! \quad /: (m-1)!$$
$$\quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$
$$\quad m \quad \quad (m+1)m$$

$$\Rightarrow 5m + m(m+1) = 40 \Rightarrow m^2 + 6m - 40 = 0$$

$$\Delta = 36 + 160 = 196 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 14 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-6 \pm 14}{2}$$

$\begin{matrix} \nearrow -10 \quad \times \\ \searrow 4 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{m=4}$

13) Demonstrasi:

$$\frac{2!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \dots + \frac{(m+1)!}{m!} = \frac{m(m+3)}{2}, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Metoda I: Prinsip induksi!
 $P(1) \checkmark \left(\Leftrightarrow \frac{2!}{1!} = \frac{1 \cdot (1+3)}{2} \Leftrightarrow 2=2 \text{ (A)} \right)$

$P(m) \checkmark \Rightarrow P(m+1)$

$$\begin{aligned} \text{Vrem: } & \underbrace{\frac{2!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \dots + \frac{(m+1)!}{m!}}_{\substack{P(m) \\ = \frac{m(m+3)}{2}}} + \frac{(m+2)!}{(m+1)!} = \frac{(m+1)(m+4)}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+3)}{2} + \frac{\overset{2}{\cancel{(n+2)!}}}{\underset{\wedge}{\cancel{(n+1)!}}} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 2n + 4 = n^2 + 5n + 4 \quad (A) \Rightarrow P(n+1) \checkmark \Rightarrow \checkmark$$

Metoda II: Deductiv (calcul):

$$\begin{aligned} \frac{2!}{1!} + \frac{\overset{3}{\cancel{2!}}}{\underset{\wedge}{\cancel{2!}}} + \dots + \frac{\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}}{\underset{\wedge}{\cancel{n!}}} &= 2 + 3 + \dots + (n+1) = [1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)] - 1 = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2 + 3n + 2 - 2}{2} = \boxed{\frac{n(n+3)}{2}} \end{aligned}$$

Exerciții

- ① Să se determine numărul de permutări ale mulțimilor:
- $$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{24}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\} ; B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+14}{x} \in \mathbb{Z} \right\} ; C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid 2x+1 \text{ divide } 21 \right\}$$
- ② Cifru unui număr este format din 5 cifre distincte. Câte combinații se pot face dacă folosim cifrele 0, 1, 2, 3, 4?
- ③ Câte numere de 5 cifre se pot forma folosind - se numără cifrele:
- a) 1, 2, 3, 4, 5 b) 0, 1, 2, 3, 4 c) 2, 3
- ④ Rezolvați ecuațiile:
- a) $3(m+1)! = (m+2)!$; b) $(m+1)!(m+1) = 6(m+2)!$; c) $(m+2)! = 20m!$