

# Matrice, determinanti, sisteme de ecuatii liniare

Matricea  $A$  cu  $m$  linii și  $n$  coloane

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$= \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  — mulțimea matricilor cu  
reali  $m$  linii și  $n$  coloane cu coeff

Adunarea matricelor:

$$A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}),$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \stackrel{\text{not}}{=} (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
The diagram shows the addition of two matrices. The first matrix has elements 2, -3, 1, 1, 2, 1. The second matrix has elements 1, 0, -1, 1, 1, 1. The result matrix has elements 3, -3, 0, 2, 3, 2. Red arrows point from the top row of the first matrix to the top row of the result. Yellow arrows point from the second and third rows of the first matrix to the second and third rows of the result. Green arrows point from the second and third rows of the second matrix to the second and third rows of the result.

# Inmultirea matricelor

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

A

B

$$1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 5$$

$$1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 6$$

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 5$$

$$A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = C \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$A \in \mathcal{U}_{m \times n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{U}_{n \times p}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = C \in \mathcal{U}_{m \times p}(\mathbb{R})$$

Fie  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  - matrice pătrată  
de ordine  $n$  (cu  $n$  linii și  $n$   
coloane)

$\det A \in \mathbb{R}$  = determinant

$$\underline{n=2} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5(-1) = 6 + 5 = 11$$

$$n=3, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{Regula Sarrus}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

# Regula Cui Sarrus

$$\begin{array}{|ccc|}
 \hline
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+ a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- (a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$+ a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 - \\ - (5 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 3)$$

$$= 0 + 15 - 1 - (0 + 2 + 3) =$$

$$= 0 + 15 - 1 - 5 = 9$$

$n=4$  (Făcând zeroi sau detruind  
determinantul, după o linie sau  
o coloană, în 4 determinanți de  
ordin 3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)(-1)^{+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 1(-1)^{+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \dots$$

(Metoda  
variantă mai ușoară, dar mai simplă.  
ca obținerea zecimilor)

Inversa unei matrice pătrate

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $A$  este matrice inversabilă dacă  $\det A \neq 0$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ji})$$

$$A_{ji} = (-1)^{i+j} \det \alpha_{ji}'$$

$\alpha_{ji}$  - submatricea lui  $A$  prin eliminarea liniei  $i$  și a coloanei  $j$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2 - 2 - 0 + 1 + 1 = -2 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2 - 2 - 0 + 1 + 1 = -2 \neq 0$$

$$A_{21} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+2)$$

$$A_{22} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+2)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

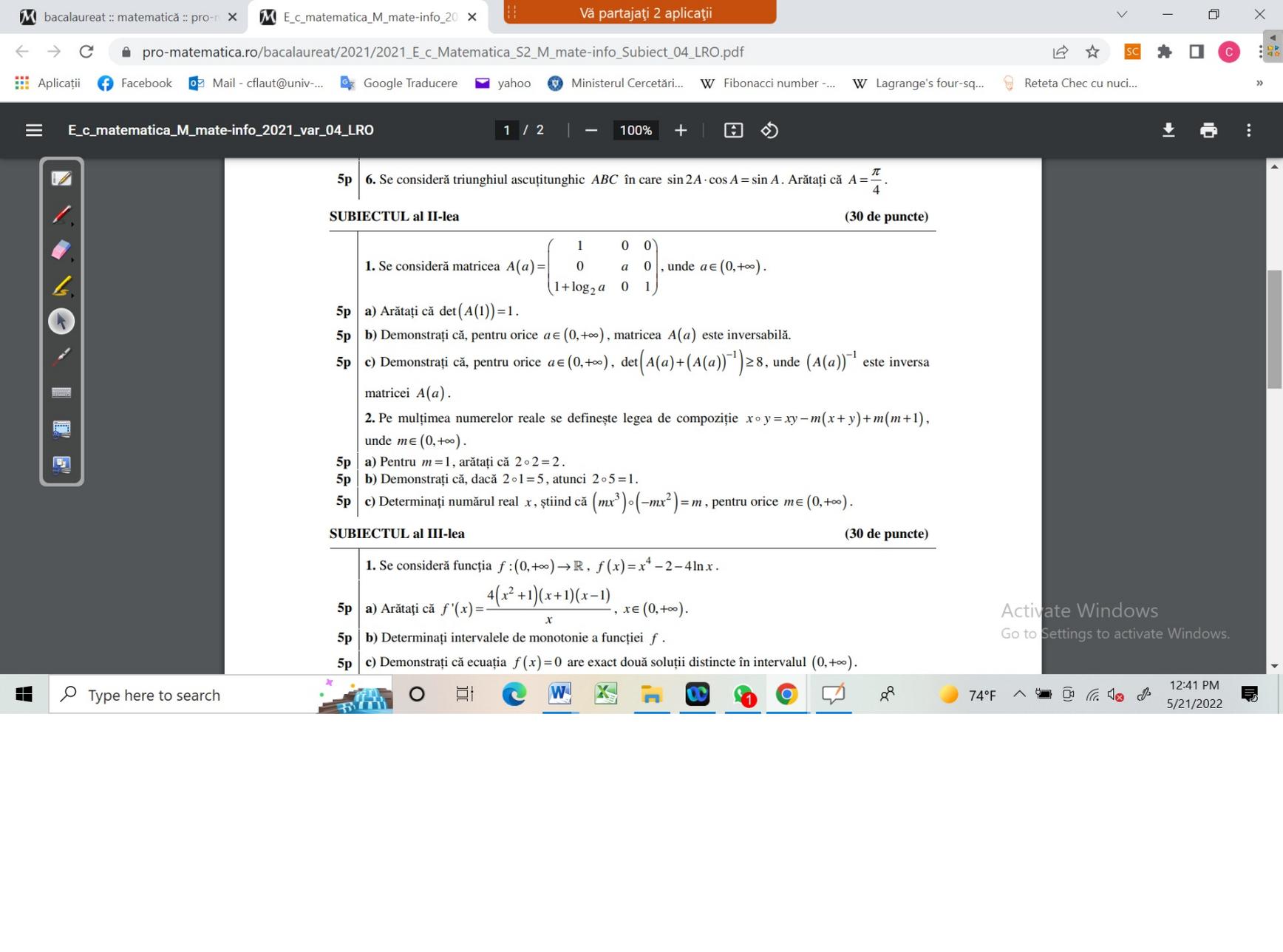
$$= 0 - 2 - 2 - 0 + 1 + 1 = -2 \neq 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2)$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



5p 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  în care  $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$ . Arătați că  $A = \frac{\pi}{4}$ .

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a \in (0, +\infty)$ .

- 5p a) Arătați că  $\det(A(1)) = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice  $a \in (0, +\infty)$ , matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice  $a \in (0, +\infty)$ ,  $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$ , unde  $(A(a))^{-1}$  este inversa matricei  $A(a)$ .

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy - m(x + y) + m(m + 1)$ , unde  $m \in (0, +\infty)$ .

- 5p a) Pentru  $m = 1$ , arătați că  $2 \circ 2 = 2$ .
- 5p b) Demonstrați că, dacă  $2 \circ 1 = 5$ , atunci  $2 \circ 5 = 1$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$ , știind că  $(mx^3) \circ (-mx^2) = m$ , pentru orice  $m \in (0, +\infty)$ .

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 2 - 4 \ln x$ .

- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că ecuația  $f(x) = 0$  are exact două soluții distincte în intervalul  $(0, +\infty)$ .

Activate Windows  
Go to Settings to activate Windows.

$$1) A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$$

$$\log_2 1 = 0$$

$$1) \det(A(1)) = 1.$$

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 1$$

2)  $\forall a \in (0, \infty)$ , matricea  $A(a)$  este  
invertibilă  $\Leftrightarrow \det A(a) \neq 0, \forall a \in (0, \infty)$

$$\det A(a) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$$
$$= a \neq 0, \forall a \in (0, \infty)$$

3) Demonstrați că pentru orice  
 $a \in (0, \infty) \Rightarrow$

$$\det \left( A(a) + (A(a))^{-1} \right) \geq 8,$$

unde  $A(a)^{-1}$  este inversa matricei  
 $A(a)$ .

Calculăm matricea  $A^{-1}(a)$

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \text{+log}_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det A(a) = a \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1}(a) = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (a+1-\log_2 a) & 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ \text{+log}_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(a) + A^{-1}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 4/a & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ -1/a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a + \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(a) + A^{-1}(a)) = 4(a + \frac{1}{a}) \stackrel{?}{\geq} 8$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ (advers\u00e4rat)}, \forall a \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0, \quad \forall a \in (0, \infty)$$

# Sisteme de ecuatii liniare

$$(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistem liniar cu  $m$  ecuatii si  $n$  necunoscute.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ - matricea sistemului}$$

Cazul 1.  $m=n$ ,  $\det A \neq 0$ ,  $A$  este  
matricea sistemului (este o matrice  
patrică). Sistemul are soluție  
unică, determinată cu regula  
lui Cramer.

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = \overline{1, n}, D = \det A,$$
$$D_i = \det A_i \quad A_i \text{ se obține din } A,$$

înlocuind coloana  $i$  cu coloana  
termenilor liberi

Exp. 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 1 + 1 + 1 + 8 = 15 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 1 + 1 - 1 + 4 + 4$$

$$x_1 = \frac{25}{15}$$

$$\underline{\text{Exp}} \cdot \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 1 + 1 + 1 + 8 = 15 \neq 0$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 4 + 1 + 1 - 32$$

$$x_2 = -\frac{22}{15}$$

Exp. 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 1 + 1 + 1 + 8 = 15 \neq 0$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 - 1 + 4 - 1 + 2 = 15$$

$$x_3 = \frac{15}{15} = 1$$

Cazul general  $m \neq n$  sau  $m = n$  și  
 $\det A = 0$ .

- 1) Se calculează rangul matricii  $A$ ;
- 2) Se verifică dacă sistemul este compatibil (are soluții);
- 3) Se determină necunoscutele în ecuațiile principale și secundare;
- 4) Se obține un sistem ce poate fi rezolvat cu regula lui Cramer.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang} A \leq \min\{3, 4\} = 3$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \Rightarrow \text{rang} > 2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rang } A = 2 \Rightarrow d_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ - minor principal}$$

Verificăm compatibilitatea sistemului  
de-menor(i) caracteristic(i) -  
se obține doi  $d_p$  (min principal) prin  
bordarea cu elu. de pe liniile nămașe  
și col. feru. liber.)

$d_c = 0 \Rightarrow$  sistem comp.

$$d_c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{areu sol.}$$

Ne cunoaștem principalele  $x_1$  și  $x_2$ .

Ne c  $x_3, x_4$  - secundare,  $x_3 = a, x_4 = b$

EC principale:  $e_1$  și  $e_2$

EC secundară  $e_3$ .

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 - 4a - b \\ x_1 + 2x_2 = -2 + a - b \end{cases} \text{ (sistem de tip Cramer)}$$

Ne cunoaștem principale  $x_1$  și  $x_2$ .  
Nec  $x_3, x_4$  - secundare,  $x_3 = a, x_4 = b$

EC principale:  $e_1$  și  $e_2$

EC secundară  $e_3$ .

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 - 4a - b \\ x_1 + 2x_2 = -2 + a - b \end{cases} \text{ (sistem de tip Cramer)}$$

$$3x_1 = -1 - 3a - 2b \Rightarrow x_1 = \frac{-1 - 3a - 2b}{3}$$

$$-3x_2 = 5 - 6a + b \Rightarrow x_2 = \frac{-5 + 6a - b}{3}$$

$$x_3 = a$$

$$x_4 = b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$5x_1 = -7a - 3b$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-7a - 3b}{5}$$

$$-5x_2 = 5 - 6a + b$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-5 + 6a - b}{5}$$

$$x_3 = a$$

$$x_4 = b$$

$$, a, b \in \mathbb{R}$$





