Limite de funcții. Continuitate

Def: $V \subseteq \mathbb{R}$ se numește vecinătate a punctului $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă $\exists\, r > 0$ astfel încât

$$(x_0 - r,\ x_0 + r) \subseteq V$$

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ nevidă. Un punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește punct de acumulare pentru A dacă pentru orice V vecinătate a lui x_0, avem

$$(V \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset.$$

$+\infty$ este punct de acumulare pentru A dacă pentru orice $r \in \mathbb{R}$, avem că

$$(r, +\infty) \cap A \neq \emptyset.$$

$-\infty$ este punct de acumulare pentru A dacă pentru orice $r \in \mathbb{R}$, avem că

$$(-\infty, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Prop: $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare pentru A dacă există un șir $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ astfel încât $x_n \longrightarrow x_0$.

Def: Mulțimea tuturor punctelor de acumulare a lui $A \subseteq \mathbb{R}$ se notează cu $A' \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Obs: Putem avea $x_0 \in A \setminus A'$ – punct izolat pt A.

Ex:

(1) $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$A' = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$0 \in A' \setminus A$

(2) $B = \{0\} \cup (1, +\infty)$

$B' = [1, +\infty]$

$0 \in B \setminus B'$

0: punct izolat

$1 \in B' \setminus B$

(3) $A = \mathbb{N}$

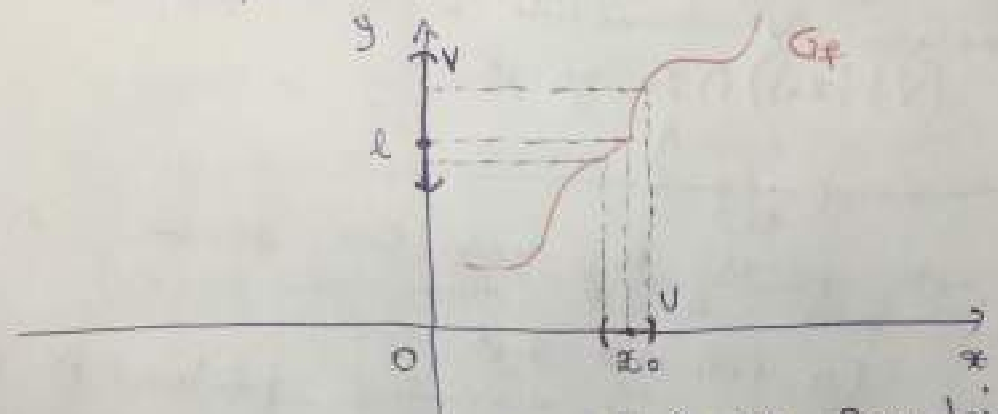
$A' = \{+\infty\}$

Def Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ nevidă și $f: D \to \mathbb{R}$ funcție. Fie $x_0 \in D'$: punct de acumulare pt D.

Spunem că funcția f are limită $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în punctul x_0 dacă: pentru orice vecinătate V a lui l, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $\forall x \in (U \cap D) \setminus \{x_0\}$, avem că $f(x) \in V$.

Prop Dacă există, limita unei funcții într-un punct este unică.

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0, x \in D} f(x) = l$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.



$\forall V, \exists U \dots$

$\boxed{Th}$ Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ nevidă și $f: D \to \mathbb{R}$ funcție. Pentru $x_0 \in D'$ avem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff$

$\forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq D \setminus \{x_0\}$, cu $x_n \to x_0$, avem $f(x_n) \to l$.

- Criteriul "$\varepsilon - \delta_\varepsilon$"?

Limite laterale

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ funcție și presupunem că x_0 este punct de acumulare pentru $D_1 = D \cap (-\infty, x_0)$.

Spunem că f are limită la stânga $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă $f|_{D_1}: D_1 \to \mathbb{R}$ are limită l_s în $x_0 \in D_1'$

Scriem

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s \text{ sau } f(x_0 - 0) = l_s$$

Analog se definește $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 + 0)$

$\boxed{\text{Th}}$ Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$. Presupunem că există $f(x_0-0)$ și $f(x_0+0)$.

Următoarele afirmații sunt echivalente

i) f are limită în x_0.

ii) $f(x_0-0) = f(x_0+0)$.

În aceste condiții, avem că

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0)}$$

Ex: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2+x, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} f(x_0-0) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 0 = 0 \\ f(x_0+0) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2+x) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} f(x_0-0) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x^2+1) = 1 \\ f(x_0+0) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0+} = +\infty \end{aligned}\right| \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

3) Determinați $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+kx, & \text{dc } x < 1 \\ 2020, & \text{dc } x = 1 \\ x-2, & \text{dc } x > 1 \end{cases}$$

are limită în $x_0 = 1$.

Sol:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^2+kx) = 1+k$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-2) = 1-2 = -1$$

f are limită în $x_0 = 1 \Leftrightarrow 1+k = -1 \Leftrightarrow k = -2$.

4) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+|x|}{x}$, $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+x}{x}, & x > 0 \\ \frac{x-x}{x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) &= 0 \\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Operații cu limite de funcții

- limită de sumă / produs / cât / putere
- Criteriul cleștelui
- Trecerea la limită în inegalități
- Limita produsului dintre o funcție mărginită și o funcție de limită zero este zero.

$\boxed{\text{Prop}}$ Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este funcție elementară și $x_0 \in D$, atunci
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ex. 1) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x + 2x^2 + 1) = \sin 0 + 2 \cdot 0 + 1$
$= 1$

2) $\lim\limits_{x \to 1} (x+1) \ln(1+x^2) = 2 \cdot \ln 2$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + x + 1}{x+1} = \dfrac{1}{1} = 1.$

4) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x^2)^{e^{x+1}} = 1^e$
$= 1$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = +\infty$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$

Când apar limitele în enunțuri de exerciții

- calcul explicit de limită
- probleme de continuitate
- existență asimptote:
  - verticale: limite în puncte din $\mathbb{R}$
  - orizontale / oblice: limite la $\pm\infty$.
- tabel de variație / injectivitate / surjectivitate / bijectivitate / imaginea unei funcții
- etc.

Limite de funcții uzuale

I) Funcții polinomiale

$f(x) = P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad , a_n \neq 0, n \geq 1$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha) \quad , \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & , n \text{ par}, a_n > 0 \\ -\infty & , n \text{ par}, a_n < 0 \\ -\infty & , n \text{ impar}, a_n > 0 \\ +\infty & , n \text{ impar}, a_n < 0 \end{cases}$

Ex. $\lim\limits_{x \to -2} (5x^2+7) = 20+7 = 27$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3+7) = +\infty$

II) Funcții raționale

P, Q: funcții polinomiale

- $a \in \mathbb{R}, Q(a) \neq 0$: $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$
- $a \in \mathbb{R}, Q(a) = 0$: dacă $P(a) \neq 0$ calculăm limite laterale
  dacă $P(a) = 0$, încercăm să simplificăm cu $x-a$, $(x-a)^2$, etc.
- $a \in \{\pm\infty\}$: se scoate factor forțat și sus și jos termenul de grad maxim.

Ex: 1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{\{\frac{0}{0}\}}{=} \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0_+} = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^3}$: nu există

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{(x-1)^3} = \frac{1}{0_-} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{1}{(x-1)^3} = \frac{1}{0_+} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x+1)^3 - x^3}{2x^2+5x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3}+3x^2+3x+1-\cancel{x^3}}{2x^2+5x}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}(3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(2 + \frac{5}{x})}$

$= \frac{3}{2}$

III. Funcția radical

- $n \in \mathbb{N}^*$ par, $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$

  $\forall a \in (0,+\infty)$, $\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt[n]{a}$

  $a = 0$: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

  $a = +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- $n \in \mathbb{N}^*$ impar, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$

  $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt[n]{a}$

  $a = -\infty$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

  $a = +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Ex: 1) $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \frac{1}{0+} = +\infty$

IV. Funcția exponențială

$b > 0$, $b \neq 1$. $f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = b^x$

- $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

- $a = -\infty$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $0 < b < 1$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $b > 1$

- $a = +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $0 < b < 1$

  $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $b > 1$.

V. Funcția logaritmică

$b > 0$, $b \neq 1$, $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b x$

$\boxed{b > 1}$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_b x = -\infty$

$\lim_{\substack{x \to a \\ (a \in \mathbb{R})}} \log_b x = \log_b a$

$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty$.

$\boxed{0 < b < 1}$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_b x = +\infty$

$\lim_{\substack{x \to a \\ (a \in \mathbb{R})}} \log_b x = \log_b a$

$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = -\infty$.

$\boxed{b = e}$!!

VI. Funcții trigonometrice

sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg

Obs: La $+\infty$,

$$\ln x \lneq \sqrt{x} \lneq x^n \lneq b^x$$

$n \in \mathbb{N}^*$, $b > 1$.

Limite remarcabile

I. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ $\quad \left\{\frac{0}{0}\right\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

II. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $\quad \lim\limits_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ $\quad (1^{\infty})$

III. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\quad \left\{\frac{0}{0}\right\}$

IV. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \left\{\frac{0}{0}\right\}$

V. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$, $r \in \mathbb{R}$ $\quad \left\{\frac{0}{0}\right\}$

Obs: Dacă $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ și $u(x) \neq 0$ pe $x \in V \setminus \{a\}$, cu V vecinătate a lui a, atunci $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$, etc.

De exemplu, $\lim\limits_{x \to a} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$.

Ex: 1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin(12x))}{\ln(1 + \sin 6x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin(12x))}{\sin 12x} \cdot \frac{\sin 6x}{\ln(1 + \sin 6x)} \cdot \frac{\sin(12x)}{\sin(6x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\ln(1 + \sin(12x))}{\sin(12x)}}_{\downarrow \; 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin 6x}{\ln(1 + \sin(6x))}}_{\downarrow \; 1/1 = 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(12x)}{12x}}_{\downarrow \; 1} \cdot \underbrace{\frac{6x}{\sin 6x}}_{\downarrow \; 1/1=1} \cdot \underbrace{\frac{12x}{6x}}_{\downarrow \; 2}$$

$= 2$.

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}_{\to 1} \cdot 2 \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}$$

$$= 1 \cdot \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+4x+x^2}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+4x+x^2}{1+x}-1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2+3x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{x^2+3x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{x^2+3x}}}_{\to e}\Bigg]^{\frac{x^2+3x}{(1+x)x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x(1+x)}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+3/x)}{x^2(1+1/x)}} = e^1 = e$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt{x^4+x^6}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^6}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}_{\downarrow \atop 1}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{1+x^2}}}_{\downarrow \atop 1}$$

$$= 1.$$

5) $$\lim_{x\to\infty} x\left[\ln(x+2)-\ln(x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right\}^{\frac{x}{x+1}}$$

$$= \ln e^1 = 1.$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2+3x}\cdot\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+3x}}\cdot\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Regula lui L'Hôspital

$\boxed{\text{Th}}$ Fie $a<b$ în $\overline{\mathbb{R}}$. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval astfel încât $(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b]$. Dacă $x_0 \in [a,b]$ și $f,g : I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ cu prop:

i) $\underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0}_{\{\frac{0}{0}\}}$ $\Big($ $\underbrace{\text{respectiv, } \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty}_{\{\frac{\cdot}{\infty}\}}$ $\Big)$

ii) f și g sunt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$, și $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I\setminus\{x_0\}$

iii) există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

Atunci există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V \cap (I\setminus\{x_0\})$, și

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ex.

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + \cos x - 1}{x} \overset{\{\frac{0}{0}\}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - \sin x}{1} = 2$$

2) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\{\frac{\infty}{\infty}\}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^3}{x^2} \overset{\{\frac{0}{0}\}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} - 3x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(2e^{x^2} - 3x)}{2\cancel{x}}$$
$$= \frac{2}{2} = 1$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \overset{\{\frac{0}{0}\}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$$

5) $$\lim_{x\to\infty} x(\pi - 2\operatorname{arctg} x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{\{\frac{0}{0}\}}{\underset{L'H}{=}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2.$$

6) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = ?$$

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} \quad \forall x>0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\{\frac{-\infty}{\infty}\}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x} = e^0 = 1$$

Cazuri exceptate

$\frac{0}{0},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \infty-\infty,\ -\infty+\infty,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$, etc

$\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{5\cdot 3^x-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3^x}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right)}{\cancel{3^x}\left(5-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}=\frac{1}{5}.$$

$[\infty-\infty]$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{3}{3}=1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2+5x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+5/x}\right)}=-\frac{5}{2}.$$

$[1^{\infty}]$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}-1\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\underbrace{\left(1+\frac{6-3x}{x^2+5x+3}\right)^{\frac{x^2+5x+3}{6-3x}}}_{\to e}\right\}^{\frac{x(6-3x)}{x^2+5x+3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(6-3x)}{x^2+5x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(6/x-3)}{\cancel{x^2}(1+5/x+3/x^2)}}=e^{-3}.$$

$[\infty\cdot 0]$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{2x^2+1}{x+1}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\left[1+\left(\sqrt{\frac{2x^2+1}{x+1}}-1\right)\right]}{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x+1}}-1}\cdot\frac{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x+1}}-1}{x}$$

$$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x+1}}-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{2x^2+1}{x+1}-1}{\left(\sqrt{\frac{2x^2+1}{x+1}}+1\right)x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2x^2\cancel{+1}-x\cancel{-1}}{(x+1)x\left(\sqrt{\frac{2x^2+1}{x+1}}+1\right)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\cancel{x}(2x-1)}{\cancel{x}(x+1)\left(\sqrt{\frac{2x^2+1}{x+1}}+1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

Continuitate

Def: Fie $f: D \to \mathbb{R}$ funcție și $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în $x_0 \iff$ pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Definiție "ε-δ"!

Prop: Dacă $x_0 \in D \cap D'$, atunci f este continuă în $x_0 \iff \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\iff \exists\ f(x_0-0)$ și $f(x_0+0)$, și $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$.

Prop: Orice funcție continuă $f: I \to \mathbb{R}$ pe un interval I are proprietatea lui Darboux: $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda$ între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, există c între x_1 și x_2 astfel încât $f(c) = \lambda$.

Prop: Funcțiile elementare sunt continue pe domeniul lor de definiție.

Def: Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ nevidă. Atunci $f: D \to \mathbb{R}$ este continuă dacă este continuă în fiecare $x_0 \in D$! ← se punctează în seminar loc faptul că f elementară $\Rightarrow f$ continuă pe $D \setminus \{x_0\}$, după ce am demonstrat că $f: D \to \mathbb{R}$ este continuă în x_0.

Obs: Folosim continuitatea de exemplu când vrem să arătăm că o anumită funcție este surjectivă. De exemplu, dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă și $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ iar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, atunci f este surjectivă!

Trebuie specificat că f este continuă, se punctează în seminar!

Ex ① Studiați continuitatea funcției

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ \sqrt{|x-1|}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Sol f elementară pe $(-\infty, 0)$ $\Rightarrow$

f continuă pe $(-\infty, 0)$

f elementară pe $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$

f continuă pe $(0, +\infty)$.

Să arătăm că f este continuă în 0. Avem

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 2^x = 2^0 = 1 \\ &\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{|x-1|} = \sqrt{1} = 1 \\ &f(0) = \sqrt{|0-1|} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = f(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$$

$\Rightarrow f$ cont în 0.

Așadar f este continuă pe $\mathbb{R}$.

② (St, Nat, test 6) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 5x-3, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2 - x + \sqrt{x^2+3}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Arătați că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Sol

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (5x-3) = 5 \cdot 1 - 3 = 2 \\ &\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(x^2 - x + \sqrt{x^2+3}\right) = 1 - 1 + \sqrt{4} = 2 \\ &f(1) = 1 - 1 + \sqrt{4} = 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f$ cont în 1

$$\left.\begin{aligned} &f \text{ elementară pe } (-\infty, 1) \Rightarrow f \text{ cont pe } (-\infty, 1) \\ &f \text{ elementară pe } (1, +\infty) \Rightarrow f \text{ cont pe } (1, +\infty) \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă pe $\mathbb{R}$

Ex.

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}}$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^4+x)}$ iv) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(4x-5)-\ln(4x+3)$ vi) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{5x}{x-3}-\dfrac{2}{x(x-3)}$

vii) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{x^2+4}}$ viii) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^2+4x}$

ix) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\sin x}$

Sol.

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}(-2+3/x)}{\cancel{x}\sqrt{1+5/x^2}} = -2$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(-2+3/x)}{|x|\sqrt{1+5/x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}(-2+3/x)}{-\cancel{x}\sqrt{1+5/x^2}} = 2$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^4+x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^2(1+1/x)}{\ln x^4(1+1/x^3)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})}{4\ln x+\ln(1+\frac{1}{x^3})}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}}{4+\frac{\ln(1+1/x^3)}{\ln x}} = \dfrac{1}{2}$

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x^2+4-x^2)}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{x\left(\sqrt{1+4/x^2}+1\right)} = \dfrac{4}{2} = 2$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln(4x-5)-\ln(4x+3)\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\dfrac{4x-5}{4x+3} = \ln 1 = 0.$

vi) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \left(\dfrac{5x}{x-3}-\dfrac{2}{x(x-3)}\right) \underset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{1}{x-3}\left(5x-\dfrac{2}{x}\right)$

$= \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{5x^2-2}{x(x-3)} = +\infty.$

vii) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{x^2+4}} \overset{(1^\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-1\right)^{\sqrt{x^2+4}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left\{\left(1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}\right)^{\frac{x^2-x+1}{2x}}\right\}^{\frac{2x\sqrt{x^2+4}}{x^2-x+1}} \Longrightarrow e^2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x\sqrt{x^2+4}}{x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}\sqrt{1+4/x^2}}{\cancel{x^2}(1-1/x+1/x^2)} = 2.$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

viii) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^2+4x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x+8-8}{x(x+4)\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{(x+4)\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)} = \dfrac{1}{4\cdot12} = \dfrac{1}{48}$

ix) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin 5x}{\sin x}-\dfrac{\sin(3x)}{\sin x}\right) = 5-3 = 2$

$\dfrac{\sin(5x)}{\sin x} = \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\dfrac{\sin(5x)}{(5x)}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\5}}{\dfrac{5x}{x}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\dfrac{x}{\sin x}}$ pt $x\to0$, etc.

Ex Calculați

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)^2}{\frac{x^2}{2}+\cos x-1}$$

Sol

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$, deoarece $x^2 \to 0$ pentru $x\to 0$

$\begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\frac{x^2}{2}+\cos x-1} \underset{L'H}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{x-\sin x}$$

$$\underset{L'H}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{12x^2}{1-\cos x}$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{24x}{\sin x} = 24.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)^2}{\frac{x^2}{2}+\cos x-1} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^2 \cdot \frac{x^4}{\frac{x^2}{2}+\cos x-1} = 1\cdot 24 = 24.$$

Ex Găsiți $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2-1)}{x+1}, & x < -1 \\ a, & x = -1 \\ b\,\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2+5x+4}, & x > -1 \end{cases}$$

să fie cont. pe $\mathbb{R}$

Sol

$$\lim_{x\nearrow -1} f(x) = \lim_{x\nearrow -1} \frac{\sin(x^2-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\sin(x^2-1)}{\underbrace{x^2-1}_{\to (x-1)(x+1)}} \cdot (x-1)$$

$$= -2$$

$$\lim_{x\searrow -1} f(x) = \lim_{x\searrow -1} b\,\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2+5x+4} = b \lim_{x\searrow -1} \frac{x^2+8-9}{(x+1)(x+4)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$= b \lim_{x\searrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+4)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \frac{-2b}{18}$$

$$= -\frac{b}{9}.$$

$f(-1) = a.$

Cum f cont. în $-1 \Rightarrow a = -2$

$-\frac{b}{9} = -2 \Rightarrow b = 18.$

Ex: Calculați

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Sol:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (1^\infty)$$

$$=\lim_{x\to 0}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}}_{\to e}\Bigg]^{\underbrace{\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}}_{\downarrow \frac{3}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos 2x}}_{\downarrow \frac{1}{1}=1}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}2\underbrace{\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}}_{\downarrow 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\downarrow 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}}_{\downarrow 3/4}=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

Sau,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}\overset{\{\frac{0}{0}\}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}\overset{\{\frac{0}{0}\}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+4\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ex: Calculați

$$\lim_{x\to -\infty}x\left(\sqrt{9x^2+5}+3x\right).$$

Sol:

$y\overset{not}{=}-x$ $\qquad \lim_{y\to\infty}-y\left(\sqrt{9y^2+5}-3y\right) \qquad -\infty(\infty-\infty)$

$$\shortparallel$$

$$-\lim_{y\to\infty}y\left(\sqrt{9y^2+5}-3y\right)=-\lim_{y\to\infty}y\,\frac{\cancel{\sqrt{9y^2}}+5-\cancel{9y^2}}{\left(\sqrt{9y^2+5}+3y\right)}.$$

$$=-\lim_{y\to\infty}\frac{5y}{\sqrt{9y^2+5}+3y}$$

$$=-\lim_{y\to\infty}\frac{5\cancel{y}}{\cancel{y}\left(\sqrt{9+\frac{5}{y^2}}+3\right)}$$

$$=-\frac{5}{3+3}$$

$$=-\frac{5}{6}.$$

Ex a) Studiați continuitatea în $x_0 = 1$ pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x-1}-1}{x-1}, & x<1 \\ \ln(1+x), & x\geq 1. \end{cases}$$

b) Determinați $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\sin(1+x)}{1+x}, & x>-1 \\ 2\alpha x+1, & x\leq -1 \end{cases}$$
să fie continuă în $x_0 = -1$.

Sol: a)
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\uparrow 1} f(x) &= \lim_{x\uparrow 1}\frac{2^{x-1}-1}{x-1} \\ &= \lim_{y\uparrow 0}\frac{2^{y}-1}{y} = \ln 2 \qquad x-1 \overset{not}{=} y \\ \lim_{x\downarrow 1} f(x) &= \lim_{x\downarrow 1}\ln(1+x) = \ln 2 \\ f(1) &= \ln(1+1) = \ln 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\downarrow 1} f(x) \Rightarrow f$ cont. în $x_0 = 1$

b)
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\uparrow -1} f(x) &= \lim_{x\uparrow -1}\frac{\alpha\sin(1+x)}{1+x} \\ &= \lim_{y\uparrow 0}\alpha\frac{\sin y}{y} = \alpha \qquad 1+x \overset{not}{=} y. \\ \lim_{x\downarrow -1} f(x) &= \lim_{x\downarrow -1}(2\alpha x+1) = 1-2\alpha \\ f(-1) &= -2\alpha+1 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$\alpha = 1-2\alpha \Rightarrow 3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1/3.$

Pentru $\alpha = \frac{1}{3}$, avem
$$\lim_{x\uparrow -1} f(x) = f(-1) = \lim_{x\downarrow -1} f(x) \Rightarrow$$
f cont. în -1.

Ex: Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin(4x)}$.

Sol
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{4x}\cdot\frac{4x}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x+x^2-\cancel{1}}{4x\left(1+\sqrt{1+x+x^2}\right)}\cdot\frac{4x}{\sin(4x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(1+x)}{4\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+x+x^2}\right)}\cdot\underbrace{\frac{4x}{\sin(4x)}}_{\to 1/1 = 1}$$
$$= \frac{1}{4\cdot 2}\cdot 1 = \frac{1}{8}$$

Ex: Se consideră funcția

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & x \in (0, 1] \\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

a) Arătați că f este continuă pe $(0, +\infty)$.

b) Calculați

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)^{\frac{1}{x-1}}$$

Sol:

a)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} (x + \ln x) = 1 + 0 = 1 \\ &\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{\{\frac{0}{0}\}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \downarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \\ &f(1) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f \text{ cont în } 1$$

f elementară pe $(0,1) \Rightarrow f$ cont. pe $(0,1)$

f elementară pe $(1,+\infty) \Rightarrow f$ cont pe $(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ f cont. pe $(0, +\infty)$.

b) Avem că

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \uparrow 1} (x + \ln x)^{\frac{1}{x-1}} \qquad (1^{-\infty})$$

$$= \lim_{y \downarrow 0} \left[1 - y + \ln(1-y)\right]^{-\frac{1}{y}} \qquad 1 - x = y$$

$$= \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \left[\left\{1 + \ln(1-y) - y\right\}^{\frac{1}{\ln(1+y) - y}}\right]^{-\frac{\ln(1+y) - y}{y}}$$

$$= e^0 = 1.$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y) - y}{y} \overset{\{\frac{0}{0}\}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{y \to 0} \frac{\frac{1}{1+y} - 1}{1}$$

$$= \lim_{y \to 0} -y$$

$$= 0.$$

Ex Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a - \cos x}{x^2}, & x < 0 \\ x + be^x, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Calculați $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$

b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care f este cont. pe $\mathbb{R}$.

Sol:

a) Dacă $a > 1$, $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = \frac{a-1}{0_+} = +\infty$.

Dacă $a < 1$, $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = \frac{a-1}{0_+} = -\infty$.

Dacă $a = 1$. $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$= \lim_{x \nearrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \nearrow 0} \frac{2}{4} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$$

$$= 1/2.$$

b) Dacă f cont. pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ cont în $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \nearrow 0} f(x) = f(0) = b$. Atunci $a = 1$ și $b = \frac{1}{2}$.

Cum $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (x + be^x) = \frac{1}{2} = f(0) = \lim_{x \nearrow 0} f(x)$, atunci f este continuă în 0.

Cum f este elementară pe $(-\infty, 0)$, atunci f continuă pe $(-\infty, 0)$. Cum f este elementară pe $(0, +\infty)$, atunci f continuă pe $(0, +\infty)$.

Așadar $a = 1, b = \frac{1}{2}$: soluție.

Ex Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3x+a} - b}{x^2+x-2} = \frac{5}{18}$$

Sol. Cum $\lim_{x \to 1} (x^2+x-2) = 0$, atunci $\lim_{x \to 1} \left(\sqrt{x^2+3x+a} - b\right) = 0$

Așadar $\sqrt{4+a} = b$.

Atunci

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3x+a} - \sqrt{4+a}}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x+\cancel{a}-4-\cancel{a}}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x^2+3x+a}+\sqrt{4+a}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x^2+3x+a}+\sqrt{4+a}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+2)\left(\sqrt{x^2+3x+a}+\sqrt{4+a}\right)}$$

$$= \frac{5}{3 \cdot 2\sqrt{4+a}}.$$

Atunci $\frac{\cancel{5}}{18_3} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}\sqrt{4+a}} \Rightarrow \sqrt{4+a} = 3 \Rightarrow 4+a = 9 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 3$.

Ex. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+a, & x \le 2 \\ ax+b, & x > 2 \end{cases}$$

este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Sol. Cum f derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ f cont. în 2. Cum $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 4+a$, $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 2a+b$,

avem $4+a = 2a+b$. Deci $a+b=4$.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x^2+a-(4+a)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{ax+b-(4+a)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{ax+\cancel{4}-a-\cancel{4}-a}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{a\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = a.$$

Cum $\exists \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$, avem că $a = 4$

Atunci $b = 4 - a = 0$.

Ex. Găsiți asimptotele funcției $f: \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$$

Sol. Studiem existența asimptotelor verticale

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{x \nearrow -1} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x+1} = \frac{>0}{0_-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{x \searrow -1} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x+1} = \frac{>0}{0_+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x=-1$ este asimptotă verticală (la stg. și la dr.)

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{1/x} = \frac{0}{1} \cdot e^{-\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y}+1} e^y$$

$\frac{1}{x} = y$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{y^2(1+y)} e^y = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^2+y}$$

$$\underset{l'H}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{2y+1} \underset{l'H}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{2} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ asimptotă verticală (la dr.)

Studiem existența asimptotelor orizontale

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot e^0 = \infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot e^0 = -\infty$$

$\Rightarrow$ nu avem asimptote orizontale.

Studiem existența asimptotelor oblice

la $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot e^0 = 1\cdot 1 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - xe^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x(1+x)}{1+x} + x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{-x}{1+x}}_{\to -1} + \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}}_{\to 1}\right]$$

$$= 0.$$

Așadar $y = x$ este asimptotă oblică la G_f la $+\infty$

Analog se tratează cazul $-\infty$.

(Sim. Nat. test 12) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

a) Arătați că

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

b) Demonstrați că pentru orice număr real nenul a, tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(a))$ sunt paralele.

c) Calculați

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{\ln x}.$$

Sol. a) Avem că

$$f'(x)=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\,\cancel{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

b) Tangenta la graficul lui f în $A(x,f(x))$ are panta egală cu

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{dr. paralele}\\ \Updownarrow\\ \text{pante egale}\end{array}\right.$

Avem $f'(a)=f'(-a)=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\Rightarrow$ tangentele la G_f în $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ au pante egale, deci sunt paralele.

c) Avem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{(x^2+1)-x^2}}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}2\,\frac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\ln x}$$

$$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}}2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$=2.$$

(M1. 2015) Se consideră $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = x - \ln(e^x + x - 1).$$

a) Arătați că

$$f'(x) = \frac{x-2}{e^x+x-1}, \forall x>0$$

b) Demonstrați că dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f.

c) Determinați imaginea funcției f

Sol: a) $f'(x) = 1 - \frac{e^x+1}{e^x+x-1} = \frac{e^x+x-1-1-e^x}{e^x+x-1}$ $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$$= \frac{x-2}{e^x+x-1}, \forall x>0.$$

b) Avem

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\{\ln e^x - \ln(e^x+x-1)\} = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x+x-1}$$ $\quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\cancel{e^x}\,1}{\cancel{e^x}(1+\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\downarrow 0}-\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\downarrow 0})} = \ln 1 = 0.$$

$\Rightarrow$ dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la G_f.

c) Tabel de variație.

$f'(x) = 0 \iff \cancel{x} = 2 \in (0,+\infty).$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - \ln 0_+ = +\infty.$

$$\begin{cases} e^x > 1, \forall x>0 \\ e^x+x-1>0, \forall x>0 \end{cases}$$

$\ln(e^2+1) > \ln e^2 = 2.$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\underbrace{2-\ln(e^2+1)}_{<0}$	$\nearrow$	0

Cum f este elementară, deci continuă pe $(0,+\infty)$, imaginea funcției f pe $(0,+\infty)$ este $[2-\ln(e^2+1), +\infty)$.

Obs: De fapt, valoarea $2-\ln(e^2+1)$ este luată o singură dată, valorile din $(2-\ln(e^2+1), 0)$ sunt luate de 2 ori, iar valorile din $[0,+\infty)$ sunt luate de f o singură dată.

M1 test(6) Se consideră funcția $f: (0,+\infty) \to (0,1)$, 2

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \forall x > 0$

b) Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} + f'(1) + \dots + f'(n)\right)^{\sqrt{n}}$$

c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

Sol. a) Avem

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

b) Sumă telescopică

$$\frac{3}{2} + f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}} = \left[\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{2\sqrt{n+1}}\right]^{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}} \quad 1^{\infty}$$

$$\to e^{\frac{1}{2}} \text{ pentru } n \to +\infty. \qquad \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{2\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}$$

c) Tabel de variație

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x+1}$$

$\Leftrightarrow x = x+1 \Rightarrow$ nu avem sol.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1 - 0 = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)}_{\infty - \infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + 1/x} + 1\right)} = \frac{1}{\infty \cdot 2} = 0.$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		— — — — — — —	
$f(x)$	1	$\longrightarrow$	0

Funcția f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty) \Rightarrow$ injectivă

Cum f este elementară $\Rightarrow f$ continuă pe $(0,+\infty)$

Cum $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ și $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ rezultă că

$\mathrm{Im} f = (0,1) \Rightarrow f$ surjectivă de la $(0,+\infty)$ la $(0,1)$. Atunci

$f: (0,+\infty) \to (0,1)$ este bijectivă.

(St Nat: test (6))

Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=e^{2x}(x-5)$$

a) Arătați că $f'(x)=e^{2x}(2x-9),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

c) Arătați că $e^{2x}\le\frac{e^9}{2(5-x)},\ \forall x\in(-\infty,5)$.

Sol. a) Avem că

$(uv)'=u'v+uv'$

$(e^u)'=e^u u'$

$$f'(x)=2e^{2x}(x-5)+e^{2x}\cdot 1$$
$$=e^{2x}(2x-10+1)$$
$$=e^{2x}(2x-9)$$

b) Avem că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^{2x}}(2x-9)}{\cancel{e^{2x}}(x-5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-9}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(2-9/x)}{\cancel{x}(1-5/x)}=2$$

c) $f'(x)=0 \iff 2x-9=0 \iff x=9/2$.

Tabel de variație:

x	$-\infty$		$9/2$		∞
$f'(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{e^9}{2}$	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=e^9\left(\frac{9}{2}-5\right)=-\frac{e^9}{2}$$

Funcția f este descrescătoare pe $(-\infty,9/2]$ și crescătoare pe $[9/2,+\infty)$. Atunci $\frac{9}{2}$ punct de minim global pentru f pe $\mathbb{R}$:

$$f(x)\ge f\left(\frac{9}{2}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Atunci

$$e^{2x}(x-5)\ge-\frac{e^9}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Pentru $x<5$, avem $x-5<0$. Împărțind ultima inegalitate cu $x-5$, pentru $\forall x<5$ avem că

$$e^{2x}\le-\frac{e^9}{2(x-5)}=\frac{e^9}{2(5-x)}.$$

(Tehnologic, test 15) Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=2x^2-5x+\ln x$$

a) Arătați că

$$f'(x)=\frac{(x-1)(4x-1)}{x},\ \forall x>0$$

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=0$.

c) Determinați ecuația tangentei la G_f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe G_f.

Sol. a) Avem că

$$f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}=\frac{4x^2-5x+1}{x}=\frac{4x^2-4x-x+1}{x}$$

$$=\frac{4x(x-1)-1(x-1)}{x}=\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$$

b) Avem că

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2x^2-5x+\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L'H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cancel{x}\left(\frac{4x^2-5x+1}{\cancel{x}}\right)}$$

$$=\frac{1}{+\infty}=0.$$

c) Ecuația tangentei la graficul lui f în punctul $(x_0,f(x_0))$ este

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Avem

$$f(1)=2-5+\ln 1=-3$$

$$f'(1)=0.$$

Ec. tangentei:

$$y-(-3)=0(x-1),$$

adică

$$\boxed{y=-3}.$$

(Tehnologic, test 7) Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^{2020}+1, & x\in(0,1] \\ \dfrac{x+1}{x}, & x\in(1,+\infty). \end{cases}$$

a) Arătați că f este continuă în $x_0=1$

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f

c) Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(1,+\infty)$.

Sol. a) Avem

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x^{2020}+1\right)=1+1=2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1+1}{1}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to1} f(x)=2$$

Cum $f(1)=1^{2020}+1=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)\Rightarrow f$ continuă în $x_0=1$.

b) Avem

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}=1$$

Dreapta $y=1$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ la G_f.

c) Pentru $x>1$, avem că

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)'=\frac{1\cdot x-1\cdot(x+1)}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$f''(x)=\left(-(x^{-2})\right)'=2x^{-2-1}$$

$$=\frac{2}{x^3}$$

$$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$$

Cum $f''(x)>0,\ \forall x>1 \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$.

(Tehnologic, test 4) Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, 4

$$f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+1}.$$

a) Arătați că

$$f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2},\ \forall x\in(-1,+\infty).$$

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la G_f

c) Demonstrați că funcția f este convexă.

Sol: a) Avem că

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+4)(x+1)-1(x^2+4x+4)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{2}x^2+2x+\cancel{4x}+\cancel{4}-\cancel{x^2}-\cancel{4x}-\cancel{4}}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2},\ \forall x>-1.$$

b) $$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{x(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(1+4/x+4/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x)}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+4}{x+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(3+4/x)}{\cancel{x}(1+1/x)}=3.$$

Dreapta de ecuație $y=x+3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f.

c) $$f'(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x^2+2x+1)-(2x+2)(x^2+2x)}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$=\frac{2(x+1)(x^2+2x+1-x^2-2x)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^3},\ \forall x>-1$$

$f''(x)>0,\ \forall x\in(-1,+\infty)\Rightarrow$

f este convexă pe $(-1,+\infty)$

(M.I. test 9) Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$,

$f(x) = \ln(1+x) - \ln(x-1)$.

a) Arătați că

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}, \ \forall x>1.$$

b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

c) Calculați $\lim_{x\to\infty}(x f(x))$.

Sol. a) Avem că

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-(1+x)}{(1+x)(x-1)}$$ $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$

$$= -\frac{2}{x^2-1}, \ \forall x>1$$

b) Pentru $x>1$, avem că $f'(x)<0$. Atunci f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$, și deci f injectivă pe $(1,+\infty)$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \ln 2 - \ln 0_+ = +\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{1+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x(1+1/x)}{x(1-1/x)} = \ln 1 = 0.$$

Cum f elementară $\Rightarrow$ continuă pe $(0,+\infty)$ avem că $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$ este și surjectivă.

Așadar $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$ este bijectivă.

c) Avem că

$$\lim_{x\to\infty}(x\,f(x)) = \lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x \quad (1^\infty)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right\}^{\frac{2x}{x-1}}$$

$$= \ln e^2$$

$$= 2$$

(Sl nat, test 8) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+3^x-4, & x<1 \\ \dfrac{x^2-x+1}{x^2}, & x\geq 1. \end{cases}$$

a) Să se arate că f este continuă pe $\mathbb{R}$

b) Demonstrați că f este crescătoare pe $(-\infty,1)$.

c) Demonstrați că $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

<u>Sol</u> a)

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2^x+3^x-4)=2+3-4=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2-x+1}{x^2}=\dfrac{1-1+1}{1}=1$

$=1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci f cont. în 1.

$f(1)=\dfrac{1-1+1}{1}=1$

Cum f este elementară, deci continuă pe $(-\infty,1)$ și $(1,+\infty)$, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$

b) $\forall x<1$, $f'(x)=(2^x+3^x-4)'$ $\qquad (a^x)'=a^x\ln a$

$=\underbrace{2^x}_{>0}\underbrace{\ln 2}_{>0}+\underbrace{3^x}_{>0}\underbrace{\ln 3}_{>0}>0$.

Cum $f'(x)>0$, $\forall x<1 \Rightarrow f$ crescătoare pe $(-\infty,1)$.

c) Pentru $x>1$, $f'(x)=\dfrac{(2x-1)x^2-2x(x^2-x+1)}{x^4}=\dfrac{x-2}{x^3}$.

Avem $f'(x)=0$ pentru $x=2$.

Tabel de variație:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+\ +\ +$	1	$-\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2}=1$

f crescătoare pe $(-\infty,1] \Rightarrow f(x)\leq f(1)=1$, $\forall x\in(-\infty,1]$.

Pe $[1,+\infty)$, f descrește pe $[1,2]$ și crește pe $[2,+\infty) \Rightarrow f(x)\in\left[\frac{1}{4},1\right]$, $\forall x\in[1,+\infty)$

Așadar $f(x)\leq 1$, $\forall x\in[1,+\infty)$.