4. Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$, care au proprietatea $f(1) \geq 3$.

$f: \underset{m}{A} \longrightarrow \underset{n}{B}$

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

$f(a_i)$, $1 \leq i \leq m$

$b_1, \ldots, b_n$

$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)$

$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m}$

n^m

$f(1), f(2), f(3)$

$3,4$

$2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$

$f(1) = 3$

$f(1) \geq 2$

$f(1)$ poate lua val. $2, 3, 4$

$f(2), f(3)$ .... $1, 2, 3, 4$

$\Rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$

$f(1) \geq 3$ și $f(2) \geq 2$

$f(1)$: $3, 4$

$f(2)$: $2, 3, 4$

$f(3)$ $1, 2, 3, 4$

$\Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ funcții.

1. Cazurile posibile : 0, 1, 2, ..., 9   10 cazuri posibile
2. Cazurile favorabile : 1, 3, 5, 7, 9   5 cazuri favorabile $\Rightarrow$
0 2 4 6 8 / 0, 3, 6, 9; $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie impar. / par / divizibil cu 3 / multiplu de 5 : 0, 5 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow P = \frac{NCF}{NCP} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

2 **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie multiplu de 6. / multiplu de 4 $\frac{4}{9}$

$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să verifice inegalitatea $\boxed{n(n-10)(n-11) \le 0}$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să verifice inegalitatea $x^2 - 2x \le 0$.

$NCP = 10$
$NCF = 2$

$x^2 - 2x \le 0 \quad x_1 = 0, x_2 = 2 \; ; \; x \in [0, 2] \cap A = \{1, 2\} \quad P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

2p 1. Identificați cazurile posibile $\rightarrow$ numărul

2p 2. Identificați cazurile favorabile $\rightarrow$ numărul

1p 3. $\rightarrow p = \frac{\quad}{\quad} = \ldots$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11. / pătrat perfect / cub perfect / suma cifrelor = 7 / a<b

caz favorabile : 11, 22, 33, 44, ..., 99 $\rightarrow$ 9 cazuri favorabile $P = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale. NCF : 11, 22, .., 99   9 cazuri fav. $\Rightarrow p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

M.
2 Cazurile posibile = M
9 cazuri posibile
Caz. favorabile : 30, 60, 90   3

$p = \frac{NCF}{NCP} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre pare. $\overline{ab}$ $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ 5 $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ 4 $NCF = 20$ $p = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10. Cazurile fav. : 10, 20, ..., 90 $NCF = 9$ $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

10, ..., 99   99 − 9 = 90 numere de 2 cifre

$\underbrace{1, .., 9, .., 99}_{99}$ $\overline{ab}$ $a \in \{1, 2, ..., 9\}$ $9 \cdot 10 = \boxed{90 \text{ numere}}$ $NCP = 90$ $p = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

$n \in [10, 11] \cap \mathbb{N}$ $b \in \{0, 1, ..., 9\}$ Cazurile favorabile : $\cancel{0}$, 10, 11   2

$(n-10)(n-11) \le 0$

din mulțimea nr. nat. de 2 cifre, acesta să fie pătrat perfect

$\boxed{NCP = 90}$

Cazurile favorabile: 16, 25, 36, 4
64, 81

$NCF = 6$

$p = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

cub perfect

Caz. favorabile: 27, 64,

$NCF = 2$

$p = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

suma cifrelor este 7:

Cazurile favorabile: 16, 61; 25, 52; 34, 43; 70

$\overline{ab}: a+b=7$

$a=1$ $\quad b \geq 0 \Rightarrow a \leq 7$

cifra zecilor este < cifra unităților

$\overline{ab} \quad 1 \leq a < b \leq 9$ $\qquad C_9^2 = \frac{9(9-1)}{2}$

$a=1, b=2, \ldots, 9$ $\quad$ 8

$a=2, b=3, \ldots, 9$ $\quad$ 7

$a=3, b=4, \ldots, 9$ $\quad$ 6

$\vdots$

$a=8, b=9$ $\quad$ 1

$1+2+3+\cdots+8 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot 9}{\cancel{2}} = 36$

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 16.

$p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$

$NCP = 90$

$\overline{ab}$: $a \cdot b = 16$

$4 \cdot 4$

$8 \cdot 2$

$2 \cdot 8$

$\underbrace{44, 28, 82}$

1, 2, 4, 8, 16

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 25.

Caz. posibile : 100, ..., 999

$NCP = \boxed{900}$ | $999 - 99 = 900$

$NCF = 36$

$\overline{abc}$

$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

$p = \frac{36}{900} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

Cazurile favorabile : avem multipli pe

Între 100, ..., 199 : 100, 125, 150, 175

200, ..., 299

⋮

900, ..., 999

În total : $9 \cdot 4 = 36$

$100 \le 25k \le 999 < 1000 \mid 25$

$4 \le k \le \frac{999}{25} < 40$

$4 \le k \le 39$ $\quad 39 - 3 = 36$

$25k$, $4 \le k \le 39$

$\Rightarrow$ 36 multipli

4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare.

$C_5^2 \cdot C_5^1 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 50$

Putem alege nr impare din
cele 5 în C_5^2 moduri, iar al
treilea elem. din mulțime în $C_5^1 = 5$ moduri

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor un număr prim.

2, 3, 5, 7 $\quad$ $\overline{abc}$; $a \in \{2, 3, 5, 7\}$ $\quad p = \frac{400}{900} = \frac{4}{9}$

$4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ $\quad NCF = 400$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr impar.

$NCP = 900$

$\overline{abc}$: $5, 5, 5$

$a \cdot b \cdot c =$ impar $\Leftrightarrow a, b, c =$ impare

$\{1, ..., 9\}$ $\quad$ 1, 3, 5, 7, 9

$NCF = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \Rightarrow p = \frac{125}{900} = \frac{5}{36}$

4. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre care au proprietatea că pătratul cifrei zecilor este egal cu diferența dintre cifra unităților și cifra sutelor.

$\overline{abc}$

$b^2 = c - a \le 8$

$b^2 < 9 \Rightarrow b < 3$

$b \in \{0, 1, 2\}$

$b = 1 \Rightarrow c = a + 1$ $\quad a \in \{1, ..., 8\}$

$b = 2 \Rightarrow c = a + 4$, $a \in \{1, ..., 5\}$

$\left(b = 1 \Rightarrow c = a + 1 \quad a = 1, c = 2 \right)$

$b = 0 \Rightarrow c = a \in \{1, ..., 9\}$

9, 8, 5 $\rbrace$ 22

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A = \{\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{25}\}$, numerele 3, 4 și a să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

~~NCP~~ · Mulțimea cazurilor posibile $= A \Rightarrow NCP = 23$

Cazurile favorabile $\quad a = 5 = \sqrt{25} \in A$

$4 =$ ipotenuza $\Rightarrow 3, a =$ catete $\Rightarrow 9 + a^2 = 16$, deci $a^2 = 7$, $a = \sqrt{7} \in A$

Cazuri favorabile : $\sqrt{25}, \sqrt{7} \Rightarrow p = \frac{2}{23}$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{50}\}$, acesta să **nu** fie număr natural.

Mulțimea cazurilor posibile : A cu 50 elemente $\Rightarrow NCP = 50$

Nr. naturale în A : $\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4, \sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6, \sqrt{49} = 7 \Rightarrow$

$NCF = 50 - 7 = 43$

$p = \frac{43}{50}$

4. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3\}$. C_4^2

C_n^k = nr. de submulțimi cu k elemente într-o mulțime cu n elemente

$0 \le k \le n$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_n^0 = 1 \ ; \ C_n^n = 1 \\ C_n^1 = n \ ; \ C_n^{n-1} = n \end{array}}$$

4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.

4. Determinați numărul submulțimilor cu 10 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.

4. Arătați că **nu** există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.

4. Se consideră ~~patru~~ n puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare. Calculați numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte. C_n^2

4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 32 de submulțimi.

câte submulțimi are o mulțime cu n elemente?

$2^n = 2^5 \Leftrightarrow \boxed{n = 5}$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$\forall\, 0 \le k \le n$

4. Calculați $2\underset{\overset{\|}{4}}{C_4^3} - 3\underset{\overset{\|}{4\cdot 3}}{A_4^2}$. =

$2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 3 = \ldots$

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

4. Determinați numărul natural n, $\boxed{n \ge 2}$, pentru care $C_n^1 + C_n^2 = 6$.

$n + \frac{n(n-1)}{2} = 6 \to$ ec. de gr 2 în n

4. Demonstrați că numerele C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

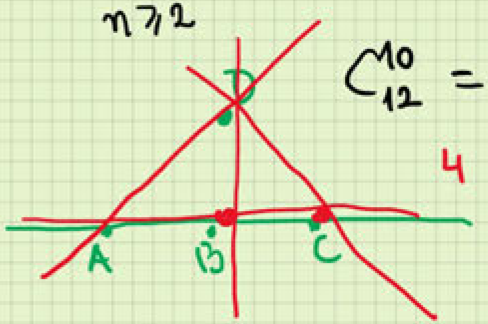
$n \quad C_n^2 = 45 \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0$

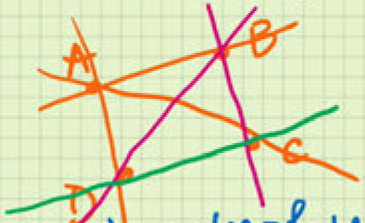
$n \ge 2$

$(n-10)(n+9) = 0$

$\left\{\begin{array}{l} n_1 = 10 \\ n_2 = -9 \\ n \in \mathbb{N},\ n \ge 2 \end{array}\right\} \Rightarrow n = 10$

$$C_{12}^{10} = C_{12}^{2} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}} \cdot 11}{\cancel{2}} = 66$$





$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

$C_4^1 = 4$

$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$

$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$

$12 = 4 + 8$

$20 = 12 + 8$

$r = 8$

$$\frac{A_5^2 + C_4^1}{2} = A_4^2 \Rightarrow \ldots$$

6. Arătați că $\sin 30^\circ \cos 30^\circ + 2\sin 45^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 1$.

6. Arătați că $\dfrac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$.

$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) =$

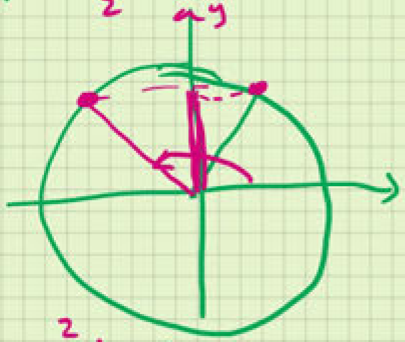
$= \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. Arătați că $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$.

$\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 50^\circ) =$

$= \sin 50^\circ$

$\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$



6. Calculați $\cos A$, știind că A este unghi ascuțit astfel încât $\sin A = \dfrac{4}{5}$.

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\dfrac{16}{25} + \cos^2 A = 1$

$\cos^2 A = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$

$\left.\begin{array}{l}\cos A = \pm \dfrac{3}{5} \\ \underline{\text{dar}}\ A \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\end{array}\right| \Rightarrow \cos A = \dfrac{3}{5}$

6. Pentru $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \dfrac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg} x = \dfrac{12}{5}$.

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x + \dfrac{25}{169} = 1$

$\sin^2 x = \dfrac{144}{169}$

$\sin x = \dfrac{12}{13}$

$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\frac{12}{\cancel{13}}}{\frac{5}{\cancel{13}}} = \dfrac{12}{5}$

6. Calculați $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

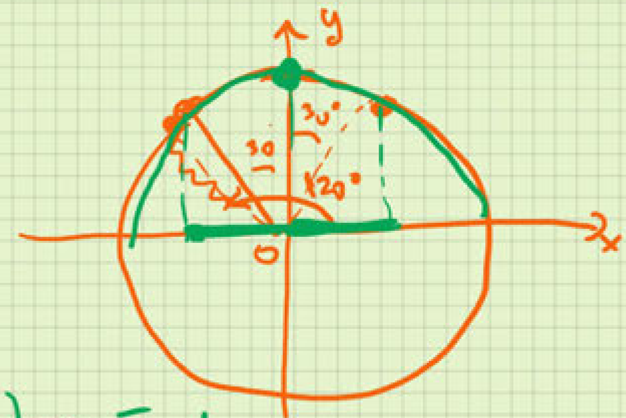
6. Se consideră $E(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg} x + 2\sin\dfrac{5x}{3}$, unde $x \in (0, \pi)$. Arătați că $E\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$ $\quad x = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad \cos 2x = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$E\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}_{=1} - \underbrace{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}}_{=1} + \underbrace{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}}_{=0} + 2\underbrace{\sin\dfrac{5\pi}{6}}_{=\frac{1}{2}}$

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

$\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$



Arătați că $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.

$\sin^2 x - 2\cancel{\sin x}\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cancel{\sin x}\cos x + \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}) = 2$

Determinați $\cos 2x$, știind că x este număr real și $\sin x = \frac{12}{13}$.

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \ldots$

Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $(2\sin x+\cos x)^2 - 4\cos x(\sin x - \cos x) = 4$.

$4\sin^2 x + 4\cancel{\sin x}\cos x + \cos^2 x - 4\cancel{\sin x}\cos x + 4\cos^2 x = 4 \iff \cancel{4(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})} + \cos^2 x = \cancel{4}$

$\cos^2 x = 0 \iff \cos x = 0$

$x\in(0,\pi)$ $\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x-\cos x$.

$\cos x - \sin x = \sin x - \cos x$ $2\cos x = 2\sin x$

$\sin x=\cos x$

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x\underbrace{\cos(\pi-x)}_{-\cos x} - \underbrace{\sin(\pi-x)}_{\sin x}\cos x = -1$.

$-\underbrace{2\sin x\cdot\cos x} = -1$

$-\sin 2x = -1$

$\sin 2x = 1$

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2x\in(0,\pi)$ $\Big\}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$

Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0$

$\cos 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) - \sin 2x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0$

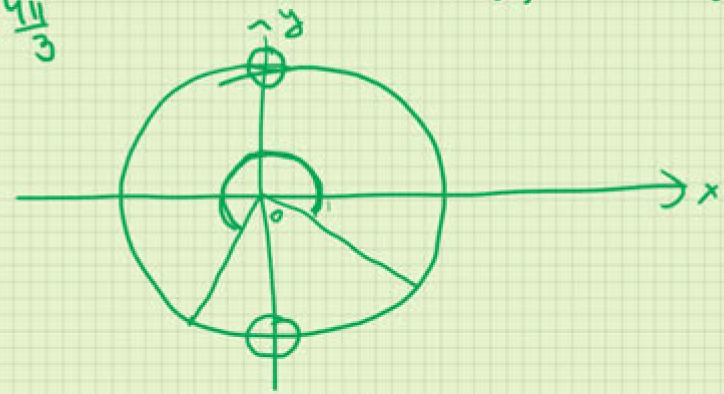
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}+x\right)=0$; $\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$

$\cos a\cdot\cos b \pm \sin a\cdot\sin b = \cos(a\mp b)$

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\cdot\sin b$

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow 3x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$ $\Big\}\Rightarrow$

$\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{8\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$

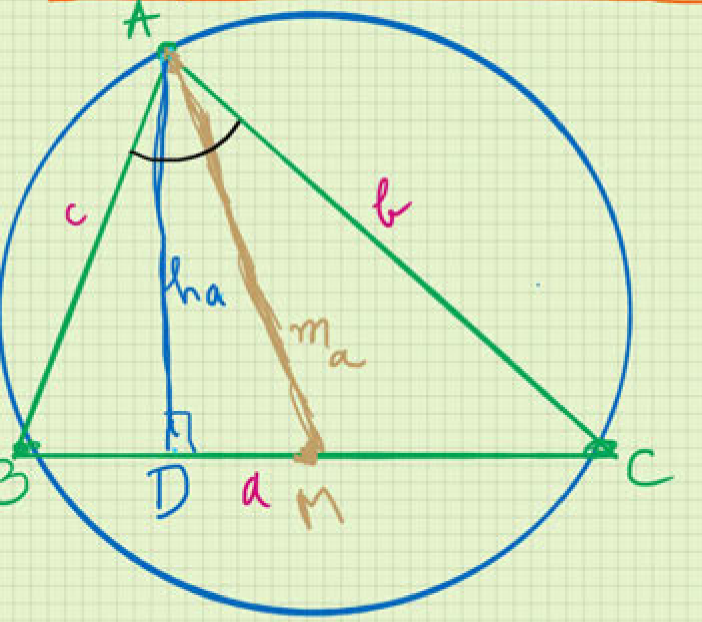


$\Rightarrow 3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$3x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}$

$3x=\frac{4\pi}{6}$ $3x=\frac{2\pi}{3}$; $x=\frac{2\pi}{9}$

Relații metrice în triunghiul oarecare



Formula lui HERON

$$\boxed{A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{abc}{4R} = r \cdot p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Teorema sinusurilor: $\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$

Teorema cosinusului: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

Teorema medianei: $\boxed{m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}}$

= raza cercului circumscris

= raza cercului înscris

$= \frac{a+b+c}{2}$ = semiperimetrul ΔABC

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=8$, $BC=8$ și aria egală cu 16. Determinați ısura unghiului B.

$$A_{\Delta ABC} = \frac{ac \sin B}{2}$$

Triunghiul ABC are $\overset{c}{\overset{\shortparallel}{AB}} = 10$ și $\overset{b}{\overset{\shortparallel}{AC}} = 5$. Arătați că $\sin C = 2\sin B$.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin B} = \frac{10}{\sin C} \Leftrightarrow \underline{\sin C = 2\sin B}$$

Determinați raza cercului circumscris triunghiului MNP, știind că $MN=16$ și $m(\sphericalangle P) = 30°$.

$$\frac{MN}{\sin P} = 2R \Leftrightarrow \frac{16}{\sin 30°} = 2R$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{\frac{1}{2}} = 2R \Leftrightarrow 2R = 32 \Leftrightarrow \boxed{R=1}$$

Arătați că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A = 1 - BC^2$.

$$R = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 1 \Rightarrow BC^2 = \sin^2 A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 1 - \cos^2 A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos^2 A = 1 - BC^2}$$

Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime $\overset{b}{\overset{\shortparallel}{6}}$, respectiv $\overset{c}{\overset{\shortparallel}{8}}$. Determinați raza cercului înscris în est triunghi.

$$S = rp \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

Ipotenuza $a = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+6+8}{2} = 12$

$$S = \frac{bc}{2} = \frac{8\cdot 6}{2} = 24 \Rightarrow r = \frac{24}{12} = 2 \quad \boxed{r=2}$$

5. Determinați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60°$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 25 + 16 - 2\cdot 5\cdot 4\cdot \cos 60° = 41 - 40\cdot\frac{1}{2} = 41-20 = 21 \Rightarrow BC = \sqrt{21}$

$\Rightarrow P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 5 + 4 + \sqrt{21} = 9 + \sqrt{21}$

5. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu $\overset{a}{2}$, $\overset{b}{3}$ și $\overset{c}{4}$. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

T. cosinusului: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow 2ab\cos C = a^2+b^2-c^2 = 4+9-16 = -7 \Rightarrow \cos C < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deci Δ obtuzunghic în C.

5. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=2$ și $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{AB}{\sin C} = 2R$

$\boxed{R=\sqrt{2}}$

$\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin C = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2R = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

6. Se consideră triunghiul ABC cu $\underset{c}{AB=60}$, $\underset{b}{AC=80}$ și $\underset{a}{BC=100}$. Calculați lungimea înălțimii AD a triunghiului ABC.

Formule pentru arie!

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = \frac{60+80+100}{2} = \frac{240}{2} = 120$;

$p-a = 120-100 = 20$

$p-b = 120-80 = 40$

$p-c = 120-60 = 60$

$\Rightarrow A_{\Delta ABC} = \sqrt{120\cdot 20\cdot 40\cdot 60} = 100\sqrt{12\cdot 2\cdot 4\cdot 6} = 100\sqrt{24^2} = 2400$

Pe de altă parte,

$A_{\Delta ABC} = \frac{AD\cdot BC}{2} \Rightarrow$

$2400 = \frac{AD\cdot 100}{2} \Rightarrow \boxed{AD=48}$

6. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $4\mathcal{A}_{\Delta ABC} = AB\cdot AC$.

$A_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2} \Rightarrow 4A_{\Delta ABC} = 2AB\cdot AC\cdot\sin A$

$4A_{\Delta ABC} = AB\cdot AC$

$\Rightarrow \sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi}{6}}$

6. Arătați că, dacă ABC este un triunghi oarecare, atunci $\cos A < \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$.

cosinusului: $\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} < \frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{AB^{\cancel{2}}}{\cancel{AB}\cdot AC} + \frac{AC^{\cancel{2}}}{AB\cdot AC}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{BC}\right)$.