LECȚII DE PREGĂTIRE BAC:

10.05.2020

Lecția 6: Metode de calcul pentru primitive. Integrala definită.

↕

Lecția 4: Derivate. Aplicații ale derivatelor.

- în Lecția 6 – vom avea:

• Primitive. Fcții ce admit primitive → • Integrala nedefinită → • Integrala definită

↓ leg. lor cu celelalte clase de fcții

↓ Tabelul de formule! ↔ Aplicații (Met. de calcul)

I. Primitive. Fcții ce admit primitive

• **Def 1**: Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval.

Fcția $F: I \to \mathbb{R}$ se numește primitiva lui f pe I

$\Leftrightarrow$ F = derivabilă pe I și

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

$F(x)$ = antiderivata lui f pe I

• **Exemplul 1** $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow F(x) = -\cos x$ pt că $(-\cos x)' = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dar dacă ne amintim că $\mathcal{C}'=0$, $\forall\, \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)=-\cos x+\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\in\mathbb{R}$ (fixat)

este tot o primitivă a lui f.

$\Rightarrow$! Dacă există o primitivă F a lui f pe I, atunci există o infinitate de primitive, care diferă de F printr-o constantă reală !

$\Rightarrow$ **Def 2**: Fie $f: I\to\mathbb{R}$ și $F: I\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa. Mulțimea tuturor primitivelor lui f pe I se notează cu $\int f(x)dx$ și se numește integrala nedefinită a lui f.

Deci $\int f(x)dx = F(x)+\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\in\mathbb{R}$, $\forall\, x\in I$.

• Exemplul 2: Din ex 1: $\int \sin x\,dx = -\cos x+\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ extindem: $\int \underbrace{\sin ax}_{f(x)}\,dx = \underbrace{-\frac{\cos ax}{a}+\mathcal{C}}_{F(x)}$, $a\neq 0$

Într-adevăr, avem:

$$F'(x)=\left(-\frac{\cos ax}{a}+\mathcal{C}\right)'=\frac{a\sin ax}{a}+\underbrace{\mathcal{C}'}_{0}=$$

$$=\sin ax.$$

$\Rightarrow -\frac{\cos ax}{a}+\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\in\mathbb{R}$ = primitiva lui $\sin ax$.

$\boxed{\text{Sau}}$ o altă scriere ar fi

$$(\cos ax)' = a \cdot (-\sin ax) \quad \Big| \int$$

$$\Rightarrow \int (\cos ax)' dx = a \int (-\sin ax) dx \quad , a \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \cos ax = -\underbrace{\int \sin ax \, dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sin ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a} \quad (\mathcal{C} = 0).$$

* Aceeași idee o avem și în formula:

• Ex 3: $\boxed{\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C} \quad , \alpha \neq -1}$

Pt $\alpha = -1$: $\int \frac{dx}{x} = ?$

- Să gândim invers ~ antiderivare! adică:

• Care să fie $F(x)$ a.î. $F'(x) = \frac{1}{x}$?

R: $F(x) = \ln x \quad , x > 0$.

În caz general: $F(x) = \ln |x| \quad , x \in \mathbb{R}^*$.

Deci $\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + \mathcal{C}}$.

Aplicația 1: Determinați o primitivă a fcției

$$f(x) = \frac{x^8 + 2x^3 - x^{2/3} - 3}{x^2} \quad , x \neq 0.$$

• Proprietăți : Leg. fcții-lor care admit primitive cu celelalte clase de fcții :

$\boxed{P_1}$: Orice fcție continuă pe I admite primitive pe I.

• Exemplul 1 : Dem că $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$. Să se det o astfel de primitivă.

Soluție : • Vom dem că g = cont. pe $\mathbb{R}$.

- Avem g cont pe $\mathbb{R}^*$ (fcții elementare).
- Studiem cont în $x_0 = 0$:

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (x+1) = 1 \; ; \; l_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^x = 1 = f(0).$$

Deci g cont pe $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ g admite primitive pe $\mathbb{R}$.

• Pentru a calcula o primitivă, avem :

$$G(x) = \begin{cases} \int e^x dx + \mathcal{C}_1, & x \geq 0 \\ \int (x+1) dx + \mathcal{C}_2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x + \mathcal{C}_1, & x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + \mathcal{C}_2, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Legătura între $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$? G = derivabilă !

$\Rightarrow$ G = cont pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ G cont în $x_0 = 0$ $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathcal{C}_1 + 1 = \mathcal{C}_2}.$$

$\Rightarrow$ Dacă luăm $C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow$ o primitivă a lui f este:

$$G(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + 1, & x < 0. \end{cases}$$

$\square$

$\boxed{P_2}$: Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o fcție ce admite primitive pe I at f are proprietatea lui Darboux pe I.

- Reamintim: Def: Spunem că $f: I \to \mathbb{R}$, I = interval are proprietatea lui Darboux pe I dacă:

$\forall a, b \in I$, $a < b$ și $\forall \lambda$ între $f(a)$ și $f(b)$ $\exists x_\lambda \in (a, b)$ a.î. $f(x_\lambda) = \lambda$.

$\Leftrightarrow f(I) = J$, J = interval

$\Leftrightarrow f$ „duce interval în interval".

$\Rightarrow$ Deci dacă f nu are propriet. lui Darboux $\Rightarrow$ f nu admite primitive!

• Exemplul: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x) =$

$$= \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Soluție: Avem $g(\mathbb{R}) = \text{Img} = \{-1, 0, 1\} \neq J =$ $\neq$ interval

Deci g nu are propr. lui Darboux $\Rightarrow$

g nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = [x] = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in [1,2) \\ 2, & x \in [2,3) \\ 3, & x = 3. \end{cases}$

$\Rightarrow$ g nu admite primitive, pt că

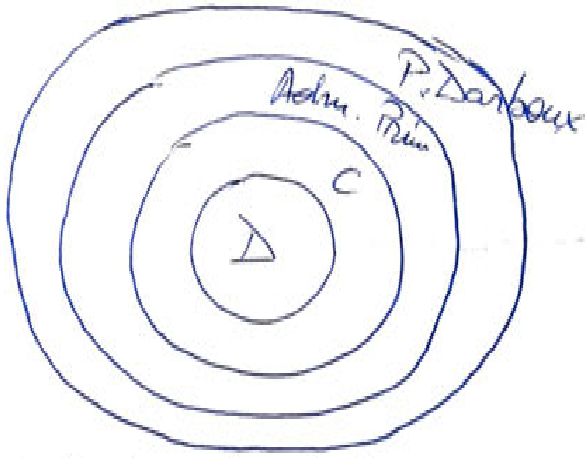
$g(I) = g([0,3]) = \{0, 1, 2, 3\} \neq$ interval.

Deci g nu are propr. lui Darboux $\Rightarrow$

g nu admite primitive pe $[0,3]$.

! Remarcă:

Legătura între toate clasele imp. de fcții.!



c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ g admite primitive pe $\mathbb{R}$?

R: NU!

Soluție: Din $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

este o fcție continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ h admite primitive pe $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ putem scrie fcția $g(x) = h(x) + i(x)$,

unde $i(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$

Dacă pp. R.A. că g = admite primitive pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $i = g - h$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ (a diferența a 2 fcții ce admit primitive) $\Rightarrow$ Fals!

Dar $i(\mathbb{R}) = \{-1, 0\} \neq$ interval $\Rightarrow$ i nu are propr. lui Darboux pe $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

i nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Deci g nu admite primitive!

$\square$

d) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ g admite primitive pe $\mathbb{R}$?

R : DA! și este un exemplu de fcție care

deși nu este cont pe $\mathbb{R}$,

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție : Fie H o primitivă a fcției continue

$$h(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Într-adevăr, avem $0\le \left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x|\cdot\underbrace{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}_{\le 1}\le |x|$

$\Rightarrow$ pt. $x\to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0=h(0)$.

$$\Rightarrow G(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}-2H(x), & x\neq 0\\ -2H(0), & x=0\end{cases}$$ este o primitivă a lui g

Într-adevăr, avem că pt $\forall x\neq 0$,

$$G'(x)=\cancel{2x\cos\frac{1}{x}}-x^2\sin\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\cancel{2H'(x)}$$

$$=\sin\frac{1}{x}=g(x),$$

iar $$-2H(0)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}-2H(x)\right).$$ $\square$

e) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}(x+1)\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

$\Rightarrow$ g admite primitive ?

R: DA! - vezi exemplul d).

II) Metode de calcul pt. integrale nedefinite: ① Integrarea prin părți; ② Schimbări de variabilă.

Exemplul 1:

a) $\int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$
$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}, \ \mathcal{C} \in \mathbb{R}, \ x > 0$

b) $\int \ln^2 x \, dx = \int x' \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x \, dx - \int x \cdot$
$\cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x \, dx - 2 \int \ln x \, dx =$
$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx\right) =$
$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + \mathcal{C}, \ \mathcal{C} \in \mathbb{R}, \ x > 0.$

c) $I = \int \sqrt{1-x^2} \, dx \overset{Met ①}{=\!=} \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x - \int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$= \arcsin x + \int x \underbrace{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}_{=(\sqrt{1-x^2})'} dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} -$
$- \underbrace{\int \sqrt{1-x^2} \, dx}_{I} \Rightarrow 2I = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$
$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + \mathcal{C},$
$\forall x \in (-1, 1).$

$\boxed{\text{SAU}}$ cu Met 2 : Fie $x = \sin t$. $\Rightarrow t = \arcsin x$

$dx = \cos t \, dt$.

$$\Rightarrow I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cdot \cos t \, dt =$$

$$= \int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2t}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\Big(2\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}\cdot\underbrace{\cos(\arcsin x)}_{\sqrt{1-x^2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}.$$

III. Integrala definită :

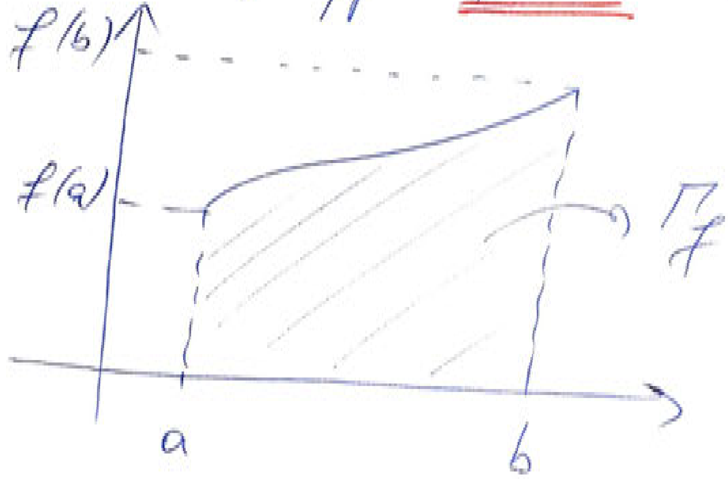
- Interpretarea geometrică
  - Motivația
- Legătura cu primitivele și int. nedefinită.
  - Modalitatea de calcul.
- Formula integrării prin părți
- Schimbări de variabile
  - Met I de schimbare a variabilei
  - Met II de schimbare a variab.
- Proprietatea de monotonie

III. 1. Motivația : Interpretarea geometrică :

= Riemann =

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și pp. $\underline{f > 0}$ =>

și f cont pe $[a,b]$: (G_f neîntrerupt)



$$\Gamma_f = \{(x,y) \;/\; 0 \le y \le f(x),\ x \in [a,b]\}.$$

=> **Pb** : $A(\Gamma_f) = ?$

R : $\boxed{A(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ . (Riemann)}}$

III. 2. Formula Leibniz - Newton :

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o fcție cont, iar $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f pe $[a,b]$.

At $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big/_a^b = F(b) - F(a)}$.

III. 3. Metode de calcul: Aplicații (I)

1) $\displaystyle\int_4^7 \frac{dx}{x^2-5x+6} =$ $\quad$ **Caz 1: $\Delta \geq 0$**

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

$x_{1,2} = \dfrac{5\pm 1}{2}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

$= \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} \Rightarrow 1 = A(x-3)+B(x-2)$

$\Rightarrow x(A+B) - 3A - 2B = 1, \ \forall x.$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ -3A-2B=1 \Rightarrow 3B-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{A=-1}, \ \Rightarrow \underline{B=1}$

Deci $\displaystyle\int_4^7 \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int_4^7 \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right) dx =$

$= -\ln|x-2|\Big|_4^7 + \ln|x-3|\Big|_4^7 = -\ln 5 + \ln 2 + \ln 4 - \ln 1$

$= \ln \dfrac{8}{5}.$

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{3x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+1} =$

$3x^2+2x+3=0 \Rightarrow \Delta = 4-4\cdot 9 < 0 \Rightarrow \nexists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$

Caz 2: $\Delta < 0$

$\Rightarrow \displaystyle\frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{x+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\Bigg|_{-1}^1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

3) T14 – St. nat.

Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}$ și

$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)$.

a) Arătați că F este o primitivă a lui f.

b) Calculați $\int_1^2 (x+1)f(x)dx$.

c) Det $a>1$ a.î. $\int_1^a f(x)dx=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{a+1}{2}$.

Soluții:

a) F = primitiva lui $f \Leftrightarrow F$ = deriv. și

$F'(x)=f(x), \forall x\in(0,\infty)$.

Avem F deriv. pe $(0,\infty)$ și

$$F'(x)=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'-\frac{1}{x+1}=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}-\frac{1}{x+1}=$$

$$=\frac{\overset{x+1}{x^2-1}}{x^2}-\frac{\overset{x^2}{1}}{x+1}=\frac{x^3+x^2-x-1-x^2}{x^2(x+1)}=f(x).$$

$\boxed{\text{SAU}}$

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{x^3-x-1}{x^3+x^2}dx=\int\frac{x^3+x^2-x^2-x-1}{x^3+x^2}dx$$

$$=x-\int\frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)}dx=x-\int\frac{x^2}{x^2(x+1)}dx-\int\frac{x+1}{x^2(x+1)}dx$$

$$=\overset{x}{\cancel{x}}-\ln(x+1)+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)=F(x).$$

$(\underline{C=0})$

b) $\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^3-x-1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^2 = 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1$

$= 1 - \ln 2.$

c) $\int_1^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_1^a = F(a) - F(1) =$

$= \frac{a^2+1}{a} - \ln(a+1) - \frac{a}{2} + \ln 2 = \frac{a^2+1-2a}{a} - \ln\frac{a+1}{2}.$

$\Rightarrow \frac{a^2-2a+1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a^2-4a+2 = a$

$2a^2-5a+2=0.$

$\Delta = 25-16 = 9 \quad (a>1)$

$a_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$ $\rightarrow \boxed{a_1 = 2}$, $\rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$

4) T14 - III

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$.

a) $\int_0^1 e^x f(x)\,dx = \frac{4}{3}.$

b) $\int_0^1 f(-x)\,dx = \int_0^1 \frac{(-x)^2+1}{e^{-x}}\,dx = \int_0^1 (x^2+1)e^x\,dx =$

$= \int_0^1 x^2(e^x)'\,dx + e^x\Big|_0^1 = x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2x(e^x)'dx + e-1$

$= e - 2\left(xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right) + e - 1 =$

$= 2e - 1 - 2\left(e - e^x\Big|_0^1\right) = 2e - 1 - 2(e - e + 1)$

$= 2e - 3.$

c) $a, b = ?$ știind că $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-x}(-x^2 + ax + b)$ este o primitivă a lui f.

Met I : F = primitivă lui $f \iff F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Avem $F'(x) = -e^{-x}(-x^2+ax+b) + e^{-x}(-2x+a)$

$$= e^{-x}(x^2 - ax - b - 2x + a) =$$

$$= e^{-x}(x^2 - (a+2)x + a - b) = f(x)$$

$$= e^{-x}(x^2+1).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2=0 & \Rightarrow \boxed{a=-2} \\ a-b=1 & \Rightarrow \boxed{b=-3} \end{cases}.$$

$\boxed{\text{SAU}}$

Met II : $\int (x^2+1)e^{-x}dx = \int x^2 e^{-x} dx + \int e^{-x} dx =$

$$= \int x^2(-e^{-x})' dx - e^{-x} =$$

$$= -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx - e^{-x} =$$

$$= e^{-x}(-x^2-1) + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx\right) =$$

$$= e^{-x}(-x^2-1) + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) =$$

$$= e^{-x}(-x^2-1-2x-2) = e^{-x}(-x^2-2x-3) = F(x)$$

$$\Rightarrow \underline{a=-2 \ ; \ b=-3}.$$

5) T_{11} - Tehnologic

$f(x)=x^5+x^3+2x+2$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

c) Dem că orice primitivă a lui f este convexă.

Soluție: Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f

$\Rightarrow F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

F = convexă $\Leftrightarrow F''(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Avem $f'(x)=5x^4+3x^2+2\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (A).

6) T_{12} - Șt. nat.

Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\ln(2x+1)$.

a) $\int_0^1 (f(x)-2\ln(2x+1))dx=\frac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x+2\ln(2x+1))dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+$

$+2\int_0^1 \ln\underbrace{(2x+1)}_{t}dx=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\int_1^3 \ln t\,dt=$

$\Rightarrow dt=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$,

$x_1=0\Rightarrow t_1=1$

$x_2=1\Rightarrow t_2=3$

$=\frac{1}{2}+t\ln t\Big|_1^3-\int_1^3 t\cdot\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}+3\ln 3-\ln 1$

$-t\Big|_1^3=\frac{1}{2}+3\ln 3-2=\ln 27-\frac{3}{2}$.

c) Dacă F este o primitivă a lui f, arătați că

$F(\pi) \le F\left(\frac{16}{5}\right)$.

Soluție: Cum $\pi < \frac{16}{5} \Rightarrow$ Tr. dem că F = crescătoare.

Cum F = primitiva lui $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Tr. dem că $f(x) \ge 0, \forall x \in [0, \infty)$.

$f(x) = x + 2\ln(2x+1) \ge 0, \forall x \in [0, \infty)$.

Fie $x \ge 0 \Rightarrow 2x+1 \ge 1 \Rightarrow \ln(2x+1) \ge 0$
$x \ge 0$ $(+)$

$\Rightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in [0, \infty)$.

! $\forall a \ge 1 \Rightarrow \ln a \ge 0$!

Deci $F'(x) \ge 0, \forall x \in [0, \infty) \Rightarrow F$ crescă pe $[0, \infty)$
$\Rightarrow F(\pi) \le F\left(\frac{16}{5}\right)$.

I) T10 - M1

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

a) Determinați primitiva G lui $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (1+e^x) f(x)$ a.î. $G(0) = 0$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$

c) Dem că $\int_{-1}^{1} f(x) \cos x\,dx = 0$.

Soluție:

a) $G(x) = \int g(x)\,dx = \int (1-e^x)\,dx = x - e^x + \mathcal{C}$.

$G(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{C} - 1 = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = 1$.

$\Rightarrow G(x) = x - e^{x} + 1.$

b) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x}dx =$

$= \int_0^1 dx - 2\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = x\Big|_0^1 - 2\int_1^e \frac{dt}{t+1} =$

Notăm $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$,

$x=0 \Rightarrow t=1$

$x=1 \Rightarrow t=e$

$= 1 - 2\ln(t+1)\Big|_1^e = 1 - 2\ln(e+1) + 2\ln 2 =$

$= 1 + 2\ln\frac{2}{e+1}.$

c) Obs că $f(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x-1}{e^x+1} =$

$= -f(x), \forall x \in [-1,1].$

$\Rightarrow f =$ impară,

$\Rightarrow f(x)\cos x \overset{not}{=} g(x)$, $g =$ impară pe $[-1,1]$.

$g(-x) = f(-x)\cos(-x) =$

$= -f(x)\cos x =$

$= -g(x), \forall x \in [-1,1].$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^0 g(x)dx + \int_0^{+1} g(x)dx =$

$x = -t$

$dx = -dt$; $x=-1 \Rightarrow t=1$, $x=0 \Rightarrow t=0$.

$\Rightarrow \int_1^0 g(-t)(-dt) + \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 g(-x)dx + \int_0^1 g(x)dx =$

$= \int_0^1 (-g(x) + g(x))dx = 0.$

8) T_{13} – Mi

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = 1+\ln(1+\sqrt{2})$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1} |xf(x)|dx$

c) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 2$.

Soluție:

a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$= \left[x+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]\Big|_0^1 = 1+\ln(1+\sqrt{2})$.

b) Fie $g(x)=|xf(x)|$, $x\in[-1,1]$.

Obs că g = fcție pară! $g(-x)=|-xf(-x)|=$

$=|-x|\cdot\left|1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right| = |x|\cdot f(x) = |xf(x)| = g(x)$, $\forall x\in[-1,1]$.

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} g(x)dx = 2\int_0^1 g(x)dx = 2\int_0^1 xf(x)dx =$

$=2\int_0^1\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$=2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2\int_1^2 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 1+2\sqrt{t}\Big|_1^2 =$

Notăm $x^2+1=t$

$2x\,dx = dt$

$x=0 \Rightarrow t=1$

$x=1 \Rightarrow t=2$

$=1+2\sqrt{2}-2 = 2\sqrt{2}-1$.

Remarcă:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & f = \text{impară} \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, & f = \text{pară} \end{cases}$$

c) Avem că $\int_0^x f(t)\,dt = x + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{l'H}{=}} 1 + \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}}_{1} = 2.$$

$\boxed{\text{SAU}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 0} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln \lim_{x\to 0}\Big(1+\underbrace{x+\sqrt{x^2+1}-1}_{g(x)\to 0}\Big)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0}\underbrace{\left[\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}\right]}_{\to e}^{\frac{g(x)}{x}}$$

$$= \ln e^{\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} =$$

$$= 1.$$

$\square$.

III.3. Metode de calcul: Aplicații (2)

• Exemplul 1: (T_7 – M1): Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x)dx = ?$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \int_0^x f(t)dt = ?$

c) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^n dx$. Dem că $(I_n)_{n \geq 1}$ conv.

Soluție:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{SAU}}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \int_0^1 t \, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

notăm $\sin x = t$; $x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

$\cos x \, dx = dt$, $x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = 1$

$\boxed{\text{SAU}}$ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (\sin x)' dx =$

$= \underbrace{\sin x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=1} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \, dx}_{I} \Rightarrow 2I = 1$

$I = \frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \cos t \, dt = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot$

$\cdot \sin t \Big|_0^x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$, pt că!

Avem $0 \le \left|\frac{1}{x} \cdot \sin x\right| = \left|\frac{1}{x}\right| \cdot \underbrace{|\sin x|}_{\le 1} \le \left|\frac{1}{x}\right|, \forall x \neq 0$

$x \to \infty$ $\to 0$

! Atunci că $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.}$

c) Fie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \cos^n x \le 1, \forall n \ge 1.$

• Studiem monotonia $(I_n)_{n \ge 1}$:

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^n x}_{\ge 0} \cdot \underbrace{(\cos x - 1)}_{\le 0} dx \le 0, \forall n \ge 1$

$\Rightarrow I_{n+1} \le I_n, \forall n \ge 1 \Rightarrow (I_n)_{n \ge 1}$ descrescător (1).

• Studiem mărginirea $(I_n)_{n \ge 1}$:

Avem $\cos x \ge 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos^n x \ge 0, \forall n \ge 1, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\boxed{P}$ $\Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \ge 0, \forall n \ge 1$

Deci $(I_n)_{n \ge 1}$ mărg. inf. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow (I_n)_{n \ge 1}$ e conv.

$\boxed{P} = ?$

$\boxed{P}$: Proprietatea de monotonie:

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă și $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Corolar: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două fcți cont, a.i. $f(x)\leq g(x), \forall x\in[a,b]$.

At
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

• Exemplul 1: Demonstrați $\int_1^2 \ln(1+x)dx < \int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

Soluție: Vom dem că $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \forall x\in[1,2]$.

Fie $f:[1,2]\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}$. Vrem $f(x)<0$, $\forall x\in[1,2]$.

Avem
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{\sqrt{1+x}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=$$

$$=\frac{2\sqrt{1+x}-2-2x+x}{(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{(1+x)\sqrt{1+x}}.$$

Avem $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}-2-x<0 \Leftrightarrow$
$2\sqrt{1+x}<(2+x)\ /^2$

$\Rightarrow 4(1+x)<4+4x+x^2 \Rightarrow 0<x^2$ (A)

Deci $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in [1,2] \Rightarrow f$ s. descrescătoare pe $[1,2]$.

$\Rightarrow$ $0 < 1 \leq x \leq 2$
f s. descresc. $\Big| \Rightarrow \underbrace{f(0)}_{\substack{\parallel \\ 0}} > f(1) > f(x)$

$\Rightarrow \quad 0 > f(x)\,, \forall\, x \in [1,2]$.

<u>Obs</u>: Să calculăm efectiv cele 2 integrale! $\square$

<u>Exemplul 2</u>: (<u>T16 – Mi</u>)

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 (x^4+1) f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

b) Dem. că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{8}$.

c) Se consideră F o primitivă a lui f a.î. $F(1)=0$. Calculați $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx$,

<u>Soluție</u>:

b) Ideea: $\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0)$.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt.$$

Într-adevăr, avem: $\forall\, x \in [0,1]$, $x^2 \leq x$,

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{x}{x^4+1}\,, \forall\, x \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\,dx \le \int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{8}.$$

Notăm $x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$,

$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1$

c) $$\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 x' \cdot F(x)\,dx = x \cdot F(x)\Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 x \cdot \underbrace{F'(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{F(1)}_{0} - \int_0^1 x \cdot \frac{x^2}{x^4+1}\,dx =$$

$$= -\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = -\frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dt}{t} =$$

Notăm $x^4+1 = t \Rightarrow 4x^3\,dx = dt$,

$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$

$x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 2$.

$$= -\frac{1}{4}\ln t\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}(\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}) = -\frac{1}{4}\ln 2.$$

$\square$.