Legi de compoziţie. Grupuri

Viviana Ene [1]

https://math.univ-ovidius.ro/

9 mai 2020

[1] vivian@univ-ovidius.ro

Legi de compoziţie. Definiţie şi proprietăţi
Grupuri şi (izo)morfisme de grupuri

Outline

- Legi de compoziţie. Definiţie şi proprietăţi.
- Grupuri.
- Morfisme şi izomorfisme de grupuri.

Viviana Ene Legi de compoziţie. Grupuri

Definiție

- O **lege de compoziție** (**operație algebrică**) pe o mulțime nevidă M este o funcție $\phi : M \times M \to M$.
  - $(x,y) \xrightarrow{\phi} \phi(x,y) =: x * y$ sau $x \circ y$ sau $x \cdot y \ldots$
    - $\phi(x,y)$ se numește **compusul** lui x cu y.

Câte legi de compoziție se pot defini pe o mulțime cu 2 elemente?

- **Exemple**:
  - Adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{N}$.
  - Adunarea, scăderea, înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
  - Adunarea și înmulțirea matricelor din $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  - Compunerea pe mulțimea $\mathscr{F}(X)$ a funcțiilor $f : X \to X$.

$X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X$

$g \circ f : X \to X$; $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\forall x \in X$

$x \perp y$, $x \top y \ldots$

$M = \{a, b\}$

$|\{\varphi : \{a,b\} \times \{a,b\} \to \{a,b\}\}|$

$(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)$

$\varphi \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$

$|\{f : \underset{m}{M} \to \underset{n}{P}\}| = n^m$

	a	b
a	$a \circ a$?	$a \circ b$?
b	-	...

tabla legii de compoziție

Parte stabilă. Lege de compoziţie indusă

Fie $\phi : M \times M \to M$ o lege de compoziţie pe M şi $S \subset M$ ~~os~~ o Submulţime nevidă. S se numeşte **parte stabilă** a lui M sau **închisă la operaţia algebrică de pe M** dacă

$$x, y \in S \Rightarrow \phi(x,y) \in S.$$

Dacă notăm legea cu $\circ$, atunci condiţia ca S să fie parte stabilă a lui M dse scrie

$$x, y \in S \Rightarrow x \circ y \in S.$$

Dacă S este parte stabilă a lui M relativ la operaţia algebrică ϕ, atunci restricţia lui ϕ la $S \times S$ este lege de compoziţie pe S.

Legi de compoziţie. Definiţie şi proprietăţi
Grupuri şi (izo)morfisme de grupuri

Parte stabilă. Lege de compoziţie indusă

Exemple

- $\mathbb{N}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ relativ la adunarea şi înmulţirea de pe $\mathbb{Z}$.
- Este $\mathbb{N}$ parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ relativ la scăderea de pe $\mathbb{Z}$?
- $\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ relativ la adunarea şi înmulţirea de pe $\mathbb{Q}$.
- Fie $GL_n(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor inversabile cu elemente numere reale. Atunci $GL_n(\mathbb{R})$ este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ relativ la înmulţirea matricelor. Dar relativ la adunarea lor? NU
- Fie $\mathscr{I}(X)$ mulţimea funcţiilor injective (surjective) $f : X \to X$. Mulţimea $\mathscr{I}(X)$ este parte stabilă a mulţimii $\mathscr{F}(X) = \{f : X \to X\}$ relativ la compunere.
- Fie $\mathscr{S}(X)$ mulţimea funcţiilor bijective $f : X \to X$. Mulţimea $\mathscr{S}(X)$ este parte stabilă a mulţimii $\mathscr{F}(X) = \{f : X \to X\}$

$\forall x, y \in S,\ x \circ y \in S$

S nu este parte stabilă

$\exists x, y \in S$ a.î. $x \circ y \notin S$!

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ inversabile

$\Leftrightarrow \det A, \det B \neq 0$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$

$\Rightarrow AB =$ inversabilă

$A =$ inversabilă

$B = -A$ inversabilă

$A + B = A + (-A) = O_n \neq$ inversabilă

Proprietăţi

Exemple

NU NU

- Scăderea pe $\mathbb{Z}$ este asociativă? Dar comutativă?
- Adunarea matricelor din $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ este lege de compoziţie asociativă şi comutativă.
- Înmulţirea matricelor din $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ este lege de compoziţie asociativă. Este şi comutativă? $n \geq 2$
- Compunerea pe mulţimea $\mathscr{F}(X)$ a funcţiilor $f : X \to X$ este asociativă. Este şi comutativă? NU

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

$(a-b)-c = a-(b-c)$

$\Updownarrow$

$\cancel{a}-\cancel{b}-c = \cancel{a}-\cancel{b}+c$

$\Updownarrow$

$c = 0$!

$a-b = b-a$?

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Proprietăți

Fie $\circ$ o lege de compoziție pe mulțimea M.

- Legea are element neutru dacă
  $$\exists\, e \in M \text{ astfel încât } \forall\, x \in M, e \circ x = x \circ e = x.$$
- Dacă legea are element neutru e, un element $x \in M$ se numește simetrizabil dacă
  $$\exists\, x' \in M \text{ astfel încât } x \circ x' = x' \circ x = e.$$

Exemple

- 0 este element neutru la adunarea din $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Scăderea pe $\mathbb{Z}$ are element neutru? NU
- Matricea 0_n este element neutru la adunarea pe $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Matricea I_n este element neutru la înmulțirea pe $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$\exists\, e \in \mathbb{Z}$ a.î.

$\forall\, x \in \mathbb{Z}$

$\underline{x - e} = e - x = \underline{x}$

$e = 0$ dar $0 - x \neq x$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}(X) = \{ f : X \to X \}$

$$1_X = id_X : X \to X, \quad x \mapsto x$$

El. neutru la compunerea funcțiilor

$(\mathbb{N},+)$ el. neutru 0

$n \in \mathbb{N} : \exists n' \in \mathbb{N}$

aî $n+n'=0$

$\Rightarrow n=0$

Proprietăți

- Dați exemple de legi de compoziție care sunt asociative, dar nu sunt comutative.
- Dați exemple de legi de compoziție care sunt asociative și comutative, dar nu au element neutru.
- Dați exemple de legi de compoziție care au element neutru, dar nu sunt nici asociative și nici comutative.

- Care sunt elementele simetrizabile la adunarea din $\mathbb{N}$? Dar din $\mathbb{Z}$?
- Care sunt elementele simetrizabile la înmulțirea din $\mathbb{Z}$?
- Care sunt elementele simetrizabile la înmulțirea pe $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
- Care sunt elementele simetrizabile la compunere în $\mathscr{F}(X)$?

$f \in \mathscr{F}(X)$ este simetrizabilă la $\circ$ dacă $\exists g \in \mathscr{F}(X)$ aî $f \circ g = g \circ f = id_X \Leftrightarrow f$ este inversabilă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f$ este bijectivă

$2\mathbb{Z} = \{2x : x \in \mathbb{Z}\}$

$2\mathbb{Z}$ parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ la înmulțire? DA

$M = \{e, a, b\}$

elementul neutru

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	$\boxed{a}$
b	b	$\boxed{b}$	a

$(ab)b = ab = a$

$a(bb) = a \cdot a = b$

$\neq$

$\Rightarrow$ ~~asociativă~~

~~comutativă~~

dar are el. neutru

	x	y
x	-	$x \circ y$
y	$y \circ x$	-

xerciții

(Teh) Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + 3.$$

(a) Arătați că $2020 * 1 = 1$.

(b) Demonstrați că $x * y = 2(x-1)(y-1)+1$ pentru orice $x.y \in \mathbb{R}$.

(c) Determinați numerele reale x pentru care $(x*x)*x = x$.

(a) $x = 2020$

$y = 1$

$2020 * 1 = 2 \cdot 2020 \cdot 1 - 2 \cdot 2020 - 2 \cdot 1 + 3 =$

$= 4040 - 4040 - 2 + 3 = 1$

(b) $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1$

$x * y = 2xy - 2x - 2y + 2 + 1$

$= 2(\underbrace{xy - x} - y + 1) + 1$

$= 2\left(x(y-1) - (y-1)\right) + 1$

$= 2(x-1)(y-1) + 1.$

$2(x-1)(y-1) + 1$

$= (2x-2)(y-1) + 1 = 2xy - 2x - 2y + 3 = x * y$

$\underbrace{(x*x)}_{A} * x = A * x =$

$= 2(A-1)(x-1) + 1$

$A = x * x = 2x^2 - 2x - 2x + 3$

$= 2x^2 - 4x + 3$

$A - 1 = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2$

$= 2 \cdot 2(x-1)^2 \cdot (x-1) + 1 = 4(x-1)^3 + 1$

$4(x-1)^3 + 1 = x \iff 4(x-1)^3 + \underbrace{1 - x} = 0$

$4(x-1)^3 - (x-1) = 0$

$(x-1)\left[4(x-1)^2 - 1\right] = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

$4(x-1)^2 = 1 \iff (x-1)^2 = \frac{1}{4}$

$x - 1 = \pm \frac{1}{2}$ $\Big\langle$ $x_2 = 1 - \frac{1}{2} =$; $x_3 = 1 + \frac{1}{2} =$

Soluțiile: $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

Alte cerinţe

Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + 3.$$

(b) Am demonstrat că $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(a') Legea $*$ admite element neutru? Dar dacă am fi considerat legea dată nu pe $\mathbb{R}$ ci pe $\mathbb{Z}$?

(b') Demonstraţi că legea $*$ este asociativă şi comutativă.

(c') Care sunt elementele reale simetrizabile în raport cu legea $*$?

(d') Demonstraţi că $1 * x = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(e') Calculaţi $1 * 2 * \cdots * 2019 * 2020$.

(f') Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Evident, f este bijectivă. Demonstraţi că $f(xy) = f(x) * f(y)$ peentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(g') Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$. Găsiţi legea de compoziţie $\circ$ pe $\mathbb{R}$ astfel încât $g(xy) = g(x) \circ g(y)$.

(a') $\exists\, e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$

$e * x = x * e = x$,

$e*x = 2(e-1)(x-1) + 1 = x$

$\iff 2(e-1)(x-1) = x-1, \forall x \in \mathbb{R}$

$x = 2$ $\quad 2(e-1) = 1$

$e - 1 = \frac{1}{2}$

$\boxed{e = \frac{3}{2}}$

$e * x = 2ex - 2e - 2x + 3 = x$

$2ex - 2e - 3x + 3 = 0.$

$x(2e-3) - (2e-3) = 0$

$\underbrace{(2e-3)}_{0}(x-1) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff 2e - 3 = 0$

$e = \frac{3}{2}$

Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$

$\underbrace{(x \circ y)}_{A} \circ z = A \circ z = 2(A-1)(z-1) + 1 = 2 \cdot 2(x-1)(y-1)(z-1) + 1 = 4(x-1)(y-1)(z-1) + 1$ (1)

$A = x \circ y = 2(x-1)(y-1) + 1 \Rightarrow A - 1 = 2(x-1)(y-1)$

$x \circ \underbrace{(y \circ z)}_{B} = 2(x-1)(B-1) + 1 = 2(x-1)2(y-1)(z-1) + 1 = 4(x-1)(y-1)(z-1) + 1$ (2)

$B = y \circ z = 2(y-1)(z-1) + 1 \Rightarrow B - 1 = 2(y-1)(z-1)$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,

deci $\circ$ este asociativă.

Alte cerințe

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + 3.$$

(b) Am demonstrat că $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(a') Legea $*$ admite element neutru? Dar dacă am fi considerat legea dată nu pe $\mathbb{R}$ ci pe $\mathbb{Z}$?

(b') Demonstrați că legea $*$ este asociativă și comutativă.

(c') Care sunt elementele reale simetrizabile în raport cu legea $*$?

(d') Demonstrați că $1 * x = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(e') Calculați $1 * \underbrace{2 * \cdots * 2019 * 2020}_{x} = 1$ (vezi și Tabla 8c!)

(f') Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Evident, f este bijectivă. Demonstrați că $f(xy) = f(x) * f(y)$ peentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(g') Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$. Găsiți legea de compoziție $\circ$ pe $\mathbb{R}$ astfel încât $g(xy) = g(x) \circ g(y)$.

(c') Știm $e = \frac{3}{2}$ = element neutru

Căutăm elementele simetrizabile

Căutăm $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$\exists x' \in \mathbb{R}$ a.î. $\underbrace{x * x' = x' * x}_{(*)} = \frac{3}{2}$

$$x * x' = \frac{3}{2}$$

$$2(x-1)(x'-1) + 1 = \frac{3}{2}$$

$$2(x-1)(x'-1) = \frac{3}{2} - 1$$

$$\underset{\substack{\neq \\ 0}}{(x-1)}(x'-1) = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{x \neq 1} \Rightarrow x' - 1 = \frac{1}{4(x-1)}$$

$$x' = \frac{1}{4(x-1)} + \overset{4(x-1))}{1} = \frac{4x-3}{4(x-1)} \in \mathbb{R}$$

Concluzia: Mulțimea elementelor simetrizabile este $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

$$* x = 2\underbrace{(1-1)}_{0}(x-1) + 1 = 1$$

(MI) 1 Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă

$x * y = xy - \sqrt{3}(x+y) + 3 + \sqrt{3}$.

√ b) Dem. că $x * y = (x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3}) + \sqrt{3}, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

c) Calculați: $\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}}_{x} * \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}}_{\sqrt{3}} * \underbrace{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \dots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}}_{y} =$

$(x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3}) + \sqrt{3} =$

$\dots = (x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3}) + \sqrt{3} =$

$= x * y$

$\sqrt{3} * y = \sqrt{3}$

$x * \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x * \sqrt{3} = \sqrt{3} * x = \sqrt{3}$

$\underbrace{x * \sqrt{3}}_{\sqrt{3}} * y = \sqrt{3} * y = \sqrt{3}$

(MI) 2 Pe $\mathbb{R}$ se def. legea asociativă $x * y = -\frac{3}{5}xy + x + y$.

a) √ $x * y = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

$x * \frac{5}{3} = \frac{5}{3} * x = \frac{5}{3}$

c) Calculați $\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{3}{3} * \dots * \frac{2020}{3} = \underbrace{\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \dots}_{x} * \frac{5}{3} * \underbrace{\frac{6}{3} * \dots * \frac{2020}{3}}_{y}$

$= \underbrace{x * \frac{5}{3}}_{\frac{5}{3}} * y = \frac{5}{3} * y = \frac{5}{3}$

(SN) 3 Pe $\mathbb{R}$: legea asociativă: $x \circ y = xy - x - y + 2$

√ (a) $x \circ y = (x-1)(y-1) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$1 * x = x * 1 = 1$

(c) $\underbrace{1^n}_{\substack{1 \\ \forall n \in \mathbb{N}}} \circ \underbrace{2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n}_{x}, \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

$= 1 \circ x = 1$

...te cerinţe

Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + 3.$$

(b) Am demonstrat că $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(a') Legea $*$ admite element neutru? Dar dacă am fi considerat legea dată nu pe $\mathbb{R}$ ci pe $\mathbb{Z}$?

(b') Demonstraţi că legea $*$ este asociativă şi comutativă.

(c') Care sunt elementele reale simetrizabile în raport cu legea $*$?

(d') Demonstraţi că $1 * x = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(e') Calculaţi $1 * 2 * \cdots * 2019 * 2020$.

(f') Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Evident, f este bijectivă. Demonstraţi că $f(xy) = f(x) * f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(g') Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$. Găsiţi legea de compoziţie $\circ$ pe $\mathbb{R}$ astfel încât $g(xy) = g(x) \circ g(y)$.

$h(x) = 3 - x$

$f(x) = 2x + 3$

$\frac{1}{2}x + 1 = u \Leftrightarrow x = 2(u-1)$

$\frac{1}{2}y + 1 = v \Leftrightarrow y = 2(v-1)$

$(\underbrace{2x+1}_{u}) \circ (\underbrace{2y+1}_{v}) = 2xy + 1$

$2x + 1 = u \Rightarrow x = \frac{u-1}{2}$; $2y + 1 = v \Rightarrow y = \frac{v-1}{2}$

$u \circ v = \cancel{2} \frac{u-1}{\cancel{2}} \frac{v-1}{2} + 1$ $\qquad (-2020) * (-2019) * \cdots$

$u \circ v = \frac{1}{2}(u-1)(v-1) + 1$ $\qquad \cdots * (-1) * 0 * 1 * \cdots * (2020)$

(f') $f(x) * f(y) =$

$= 2(f(x)-1)(f(y)-1) + 1 =$

$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}x \cdot \frac{1}{2}y + 1 = \frac{1}{2}xy + 1 = f(xy)$

$f(x) - 1 = \frac{1}{2}x + 1 - 1 = \frac{1}{2}x$

$f(y) - 1 = \frac{1}{2}y$ $\qquad \underline{\underline{0}}$ $\quad f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$

$f(xy) = f(x) * f(y)$ $\qquad f$ bijecţie

$(\mathbb{R}, \cdot)$ $\qquad (\underbrace{\tfrac{1}{2}x+1}_{u}) * (\underbrace{\tfrac{1}{2}y+1}_{v}) = \frac{1}{2}xy + 1$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$u * v = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}(u-1)2(v-1) + 1 = 2(u-1)(v-1) + 1$

$$\boxed{x * y = 2(x-1)(y-1) + 1}$$

Definiţia grupului

Fie G o mulţime nevidă şi $\circ : G \times G \to G$ o lege de compoziţie (sau operaţie algebrică) pe G. Perechea $(G, \circ)$ se numeşte grup dacă

- legea $\circ$ este asociativă, adică
  $$\forall x, y, x \in G, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$
- legea $\circ$ admite element neutru, adică
  $$\exists e \in G \text{ astfel încât } \forall\, x \in g, x \circ e = e \circ x = x.$$
- orice $x \in G$ are simetric relativ la $\circ$, adică
  $$\forall x \in G, \exists\, x' \in G \text{ astfel încât } x \circ x' = x' \circ x = e.$$

Dacă legea $\circ$ este comutativă, grupul se numeşte comutativ sau abelian.

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

$z^4 = 1$

Exemple

Exemple de grupuri:

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sunt grupuri comutative.
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt grupuri comutative.
- $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$. $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ este grup necomutativ pentru $n \geq 2$.
- $\mathscr{S}(X) = \{f : X \to X | f \text{ bijecţie }\}$. $(\mathscr{S}(X), \circ)$ este grup necomutativ dacă X are cel puţin 3 elemente.
- Fie $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$ este grup cu înmulţirea numerelor complexe. *Grupul rădăcinilor de ordinul n ale unităţii*. Exemplu: $U_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\} = \{1, -1, i, -i\}$

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$
$z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1$
sau
$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm i$

Morfisme și izomorfisme

Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri și $f : G \to G'$ o funcție. Funcția f se numește **morfism de grupuri** dacă

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y) \text{ pentru orice } x, y \in G.$$

Dacă, în plus, f este bijectivă, atunci f se numește **izomorfism** de grupuri. Două grupuri $(G, \circ)$ și $(G', *)$ între care există un izomorfism se numesc grupuri **izomorfe**. Scriem $G \simeq G'$.

Exemple:

- $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\{1, -1\}, \cdot), f(n) = (-1)^n$ este morfism de grupuri.
- $f : (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot), f(x) = e^x$ este izomorfism de grupuri.
- $f : (U_4, \cdot) \to (\mathbb{Z}_4, +), f(1) = \widehat{0}, f(i) = \widehat{1}, f(-1) = \widehat{2}, f(-i) = \widehat{3}$.

$G \cong G'$

$G \not\cong G'$

$f(m+n) = (-1)^{m+n} = (-1)^m \cdot (-1)^n = f(m) f(n)$

$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) f(y)$

$\Rightarrow f$ morfism

$f(x) = e^x$ funcție bijectivă $\Big\} \Rightarrow f$ este izomorf

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1				
i				
-1				i
$-i$				

$+$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{3}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$

f bijecție

$f((-1)(-i)) = f(i) = \widehat{1}$

$f(-1) + f(-i) = \widehat{2} + \widehat{3} = \widehat{5} = \widehat{1}$

Cele 2 table sunt la fel structurate $\Rightarrow f$ este izo

Exerciţii

(MI) Pe mulţimea $G = (0,1)$ se consideră legea de compoziţie asociativă

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}.$$

(a) Arătaţi că $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.

(b) Verificaţi dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie $*$.

(c) Ştiind că $(G,*)$ este grup, demonstraţi că funcţia $f : G \to M, f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$ unde $M = (0,\infty)$, iar "$\cdot$" reprezintă operaţia de înmulţire a numerelor reale.

(a) $$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2-3-3+9}{9}} = \frac{1}{5}$$

(b) $e = \frac{1}{2}$ este element neutru $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in (0,1)$ avem $x * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} * x = x$

$$x * \frac{1}{2} = \frac{\frac{x}{2}}{\cancel{2}x\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - \cancel{x} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{x}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = x$$

$$\frac{1}{2} * x = \ldots = x$$

$\frac{1}{2} \in G$ $\Rightarrow \frac{1}{2}$ = el. neutru al legii

c) f morfism dacă $\forall\, x, y \in G = (0,1)$, $f(x*y) = f(x)\cdot f(y)$

$$f(x*y) = \frac{1}{x*y} - 1 = \frac{2xy - x - y + 1}{xy} - 1 =$$

$$= \frac{2xy - x - y + 1 - xy}{xy} = \frac{xy - x - y + 1}{xy} \ (1) = \frac{x(y-1) - (y-1)}{xy} =$$

$$= \frac{(y-1)(x-1)}{xy} = \frac{(x-1)(y-1)}{xy} = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{y-1}{y} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = f(x) f(y).$$

$$f(x) f(y) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{(1-x)(1-y)}{xy} = \frac{xy - x - y + 1}{xy} \ (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow f(x*y) = f(x) f(y)$

$f:(0,1)\to(0,\infty)$
$f(x)=\frac{1}{x}-1$

f bijectivă $\Leftrightarrow$ f este injectivă și surjectivă

injectivă $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\ x,y\in(0,1)$, $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Fie $x,y\in(0,1)$ a.î. $f(x)=f(y)\Rightarrow \frac{1}{x}-\cancel{1}=\frac{1}{y}-\cancel{1}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow x=y$.

$\Rightarrow$ f este injectivă

f surjectivă $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\ y\in(0,\infty)$, $\exists\ x\in(0,1)$ aî $f(x)=y$.

codomeniu   domeniu

Fie $y\in(0,\infty)$

$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{x}-1=y\Leftrightarrow\frac{1}{x}=y+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{y+1}\in(0,1)\Rightarrow$ f surjectivă

$y\in(0,\infty)\Rightarrow\frac{1}{\underbrace{y+1}_{>0}}>0$ $\frac{1}{y+1}<1 \,\Big|_{y+1>0} \Leftrightarrow 1<y+1\Leftrightarrow y>0$ A

$f:(0,1) \to (0,\infty)$

$f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este derivabilă pe $(0,1)$

și $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' - 1' = -\frac{1}{x^2} < 0,\ \forall\ x \in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare $\Rightarrow$ f este injectivă (1)

	0		1
f'		$- - - - - - - -$	
f	∞	$\searrow$	0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \frac{1}{0_+} - 1 = \infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ este continuă pe } (0,1) \\ \lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty \\ \lim_{x\nearrow 1} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = (0,\infty) \Rightarrow f \text{ surjectivă } (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ f este bijecție.

Exerciții

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}.$$

(a) Arătați că $2020 * (-2020) = 2$.

(b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție $*$.

(c) Știind că $(\mathbb{R}, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 8$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

———— Cerință suplimentară ————

Calculați $\underbrace{0 * 0 * 0 * \cdots * 0}_{2020}$.

(a) $2020 * (-2020) =$

$= \sqrt[3]{2020^3 + (-2020)^3 + 8} =$

$= \sqrt[3]{\cancel{2020^3} - \cancel{2020^3} + 8} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\left(x * (-x) = \sqrt[3]{\cancel{x^3} + \cancel{(-x)^3} + 8} = 2 \right)$

(b) legea $*$ are elementul neutru $e \in \mathbb{R}$ dacă $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{x * e} = e * x = \underline{x}$.

$x * e = \sqrt[3]{x^3 + e^3 + 8} = x \;\Big|^3$

$(\Rightarrow)\ \cancel{x^3} + e^3 + 8 = \cancel{x^3} \Leftrightarrow e^3 = -8 \Leftrightarrow e = -2$

$e * x = x \;\cdots\cdots\; e = -2 \in \mathbb{R}$ el. neutru relativ la $*$.

(c) f este morfism $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x*y) = f(x) + f(y)}$

ind. după $n \geq 2$: $(x_1 * \cdots * x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$

$f(x*y) = (x*y)^3 + 8 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}\right)^3 + 8 =$

$= x^3 + y^3 + 8 + 8 = (x^3 + 8) + (y^3 + 8) = f(x) + f(y) \Rightarrow f$ morfism

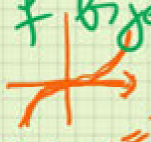
f e polinomială $\Rightarrow f$ deriv. pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+ + +$	0	$+ + + + +$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ inj. (1)

f continuă pe $\mathbb{R}$ și $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ surj. (2)

(1) + (2) $\Rightarrow f$ bijectie



$f(\overbrace{\underbrace{0 * 0 * \cdots * 0}_{2020}}^{a}) = \underbrace{f(0) + f(0) + \cdots + f(0)}_{2020} = 2020 \cdot f(0) = 2020 \cdot 8$

$f(a) = 8 \cdot 2020$

$a^3 + 8 = 8 \cdot 2020$

$a^3 = 8 \cdot 2020 - 8 = 8 \cdot 2019 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{8 \cdot 2019} = 2\sqrt[3]{2019} \Rightarrow \underbrace{0 * \cdots * 0}_{2020} = 2\sqrt[3]{2019}$