Derivate. Aplicații ale derivatelor

Def: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ nevidă și $x_0 \in I \cap I'$ (punct de acumulare pentru I). Fie
$f: I \to \mathbb{R}$ funcție.

Spunem că f admite derivată în punctul x_0 dacă există (în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ notată cu } f'(x_0).}$$

Dacă $f'(x_0)$ există și este finită (adică, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$), spunem că f este derivabilă în x_0.

Obs:

- $x_0 \in I' \iff \exists\, (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ a.î. $x_n \to x_0$.
- În general, $I \subseteq \mathbb{R}$ va fi interval și x_0 va fi în interiorul intervalului. Eventual, unul dintre capetele intervalului.
- Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, avem

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Așadar $f'(0)$ există, dar f nu este derivabilă în 0.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ nu admite derivată în 0.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ în } \overline{\mathbb{R}}.$$

Motivație:

fizică: modelarea matematică a noțiunii intuitive de viteză a unui mobil

geometrică: tangenta la o curbă plană,

etc.

Echivalent:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

dacă aceasta există în $\mathbb{R}$.

Exemplu: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

Pentru $x_0 \in \mathbb{R}$ oarecare,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= 3x_0^2.$$

Așadar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă,

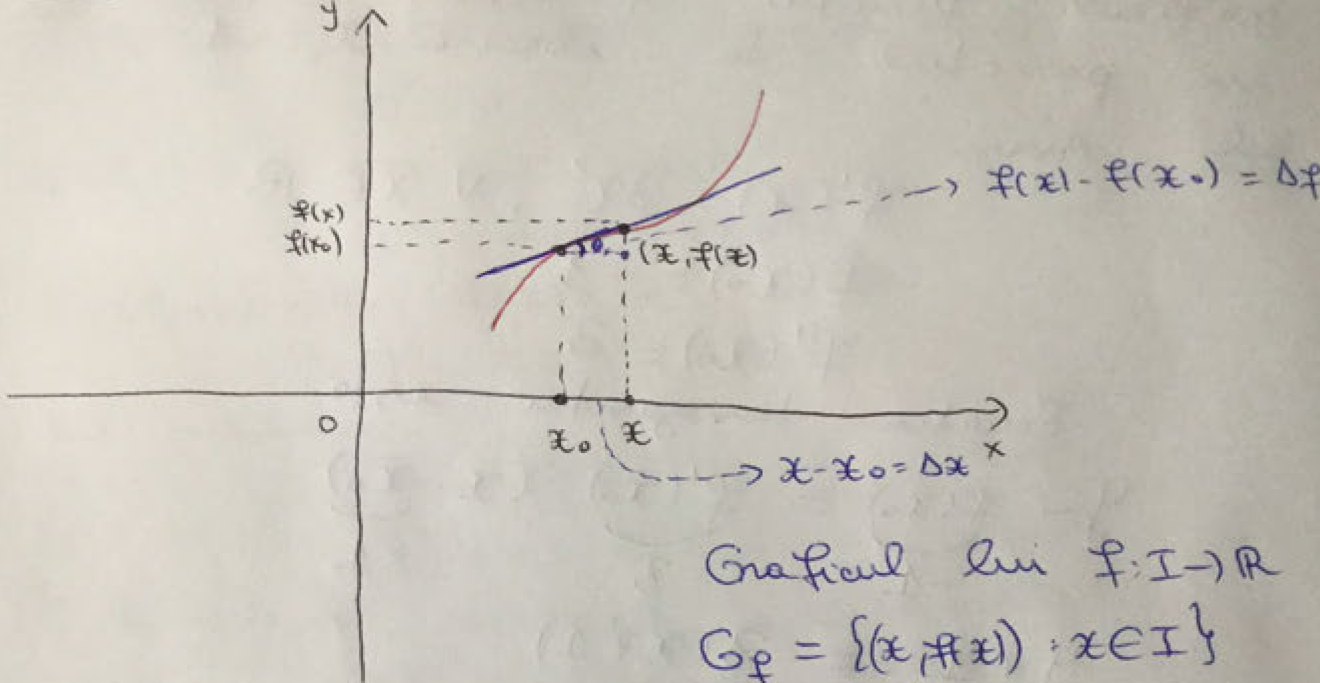
$$f'(x) = 3x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Interpretarea geometrică a derivatei.
- Derivatele funcțiilor elementare
- Operații cu funcții derivabile / Formule de calcul
- De ce este important studiul derivatelor?

Monotonie, convexitate, reprezentare grafică, rezolvare grafică a ecuațiilor, etc.

Regula lui L'Hospital simplifică munca la calculele de limite!

Interpretarea geometrică a derivatei într-un punct



Graficul lui $f: I \to \mathbb{R}$

$G_f = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Dpdv geometric,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \theta_x \xrightarrow[x \to x_0]{} \operatorname{tg} \theta,$$

$x \neq x_0$

θ = unghiul dintre tangenta la G_f în $(x_0, f(x_0))$ și orizontală.

Așadar:

- derivata funcției f în x_0, dacă ea există, este panta tangentei la G_f în punctul $(x_0, f(x_0))$
- dacă $f'(x_0) \in \{-\infty, \infty\}$, atunci tangenta la G_f în x_0 este de ecuație

$$\boxed{x = x_0}$$

(Paralelă cu axa Oy)

- dacă $f'(x_0) = m \in \mathbb{R}$, tangenta la G_f în x_0 are ecuația

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

(Oblică, dacă $f'(x_0) \neq 0$, și paralelă cu axa Ox dacă $f'(x_0) = 0$.)

Ex: Calculați ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ în punctul de abscisă $x_0 = -1$.

Sol: Avem

$$f'(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$f(x_0) = -1$$
$$f'(x_0) = 3.$$

Ecuația tangentei este:

$$y - \underbrace{f(x_0)}_{-1} = \underbrace{f'(x_0)}_{3} (x - \underbrace{x_0}_{-1})$$

$$y + 1 = 3(x+1).$$
$$y = 3x + 2.$$

Ex. Să se determine punctele unde tangenta la graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$, trece prin origine.

Sol:

$$f'(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ecuația tangentei la G_f în $(x_0, f(x_0))$ este

$$(d) \quad y - x_0^3 - 1 = 3x_0^2 (x - x_0).$$

Cum $(0,0) \in d$, deducem că

$$-x_0^3 - 1 = -3x_0^3$$
$$2x_0^3 = 1$$
$$x_0^3 = \frac{1}{2}$$
$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Tangenta la G_f în $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{2}\right)$ trece prin origine.

Derivatele funcțiilor elementare

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}$ constantă

$$c' = 0$$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(x^n)' = n x^{n-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$.

$$(x^r)' = r x^{r-1}, \ \forall x > 0.$$

Caz particular:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ \forall x > 0.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -1\, x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}, \ \forall x > 0.$$

- $f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(x) = a^x$, $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$.

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Caz particular:

$$(e^x)' = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ \forall x > 0.$$

Caz particular:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ \forall x > 0.$$

- $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

$$(\sin x)' = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

$g: \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

- $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$, $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \arccos x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1,1)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1,1).$$

- $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arcctg} x$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Reguli de derivare

- Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe I și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci

$$\boxed{(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \ \forall x \in I}$$

- Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe I, atunci

(derivare produs)

$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \ \forall x \in I}$$

- Dacă $g : I \to J$ este derivabilă în orice $x \in I$, și $f : J \to \mathbb{R}$ este derivabilă în orice $y \in J$, atunci

$f \circ g : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în orice $x \in I$ și

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)}$$

(derivare funcții compuse)

- Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe I și $g(x) \neq 0, \forall x \in I$, atunci

(derivare cât)

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \ \forall x \in I}$$

Observație:

Teorema de derivare a funcțiilor compuse împreună cu tabelul de derivare a funcțiilor elementare permit obținerea tabelului de derivare a funcțiilor compuse. De exemplu,

- dacă $u(x) > 0, \forall x \in I$ și u derivabilă pe I,

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\, u'(x)$$

$$\left(\ln u(x)\right)' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x),$$

etc.

Ex: Calculați derivatele funcțiilor

(1) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$.

$$f'(x)=e^x+\frac{(x-1)'x-(x-1)x'}{x^2}=e^x+\frac{1}{x^2}$$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

(2) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$.

$(u^3)'=3u^2\cdot u'$

$$f'(x)=3\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\left(x-\frac{1}{x}\right)'$$
$$=3\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{3(x^2-1)^2(x^2+1)}{x^4}$$

(3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u'$

$$f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

(4) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{x^2}{1+x}$

$$f'(x)=\left(\ln(x^2)-\ln(1+x)\right)'$$ $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$
$$=\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{1+x}$$ $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$
$$=\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}$$
$$=\frac{x+2}{x(1+x)}$$

(5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2\cos x}$

$(e^u)'=(e^u)\cdot u'$

$$f'(x)=e^{x^2\cos x}\left(2x\cdot\cos x-x^2\sin x\right)$$ $(uv)'=u'v+uv'$
$$=xe^{x^2\cos x}\left(2\cos x-x\sin x\right)$$

(6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$

$$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin x\cdot\sin x}{(2+\cos x)^2}$$
$$=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

(7) $f: (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{(-2x)(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \qquad \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\,u'$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

(8) $f: \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right).$

$$f'(x) = \frac{\frac{\cancel{2}\cos x}{\cancel{2}\sqrt{2\sin x+1}} + \frac{\cancel{2}\cos x}{\cancel{2}\sqrt{2\sin x-1}}}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}} \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,u'$$

$$= \frac{\cos x\,\cancel{\left(\sqrt{2\sin x-1}+\sqrt{2\sin x+1}\right)}}{\sqrt{2\sin x+1}\,\sqrt{2\sin x-1}\,\cancel{\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x-1}}.$$

(9) $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(x^n+\sqrt{x^{2n}+1}\right), n \in \mathbb{N}.$

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1} + \frac{\cancel{2}nx^{2n-1}}{\cancel{2}\sqrt{x^{2n}+1}}}{x^n+\sqrt{x^{2n}+1}}$$

$$= \frac{nx^{n-1}\,\cancel{\left(\sqrt{x^{2n}+1}+x^n\right)}}{\cancel{\left(x^n+\sqrt{x^{2n}+1}\right)}\,\sqrt{x^{2n}+1}}$$

$$= \frac{nx^{n-1}}{\sqrt{x^{2n}+1}}$$

(10) $u, v: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ derivabile,

$$f(x) = u(x)^{v(x)}.$$

$$f'(x) = \left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)'$$

$$= e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

$$= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Test I - bac (Mate Info)

Fie $f: (1,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2}.$$

a) Arătați că

$$f'(x) = \frac{-2(3x^2-3x+1)}{x^3(x-1)^3}, \ \forall x>1.$$

b) Determinați ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(0,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul lui f în punctul de abscisă $x=2$ situat pe graficul lui f.

c) Calculați

$$\lim_{n\to\infty} (f(2)+\dots+f(n))^{n^2}.$$

Sol.

a) $$f'(x) = ((x-1)^{-2} - x^{-2})'$$

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$

$$= (-2)(x-1)^{-3} \cdot 1 - (-2)x^{-3} \cdot 1$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{x^3} = -2\frac{x^3-(x-1)^3}{x^3(x-1)^3}$$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$$= -2\frac{x^3-(x^3-3x^2+3x-1)}{x^3(x-1)^3} = \frac{-2(3x^2-3x+1)}{x^3(x-1)^3}$$

b) Ecuația dreptei este

$$y-3 = \underset{f'(2)}{\underset{\parallel}{m}}(x-0)$$

drepte paralele $\Leftrightarrow$ pante egale

$$y-3 = -\frac{7}{4}x \Rightarrow y = 3-\frac{7x}{4}.$$

c) Ideea: avem sumă telescopică!

$$(f(2)+f(3)+\dots+f(n))^{n^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{(n-1)^2}} - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$= \left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-1}$$

(1^∞)

$$\to e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e}.$$

Test 10 Bac (Mate-Info): Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2) + 1.$$

a) Să se arate că $f'(5) = 6$.

b) Să se arate că ecuația $f'(x) = 0$ are trei soluții reale

c) Calculați
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(n+1) - 1}{f(n) - 1} \right)^n.$$

Sol:

a) $f'(x) = \overbrace{(x-5)'}^{=1}(x-4)(x-3)(x-2)$
$+ (x-5)\left((x-4)(x-3)(x-2)\right)'$

$$(f_1 f_2 f_3 f_4)' = f_1' f_2 f_3 f_4 + f_1 f_2' f_3 f_4 + f_1 f_2 f_3' f_4 + f_1 f_2 f_3 f_4'.$$

$f'(5) = (5-4)(5-3)(5-2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

b) Avem
$$f'(x) = (x-4)(x-3)(x-2) + (x-5)(x-3)(x-2) + (x-5)(x-4)(x-2) + (x-5)(x-4)(x-3).$$

$f'(5) = (5-4)(5-3)(5-2) > 0$
$f'(4) = (4-5)(4-3)(4-2) < 0$
$f'(3) = (3-5)(3-4)(3-2) > 0$
$f'(2) = (2-5)(2-4)(2-3) < 0.$

Cum f' este elementară, deci continuă, conform prop. Darboux $\Rightarrow$ ecuația $f'(x) = 0$ are măcar o rădăcină în fiecare din intervalele $(2,3)$, $(3,4)$ și $(4,5)$. Cum $f'(x)$: polinom de grad 3 $\Rightarrow$ ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei soluții reale.

c) Avem că
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(n+1) - 1}{f(n) - 1} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{\cancel{(n-4)}\cancel{(n-3)}\cancel{(n-2)}(n-1)}{(n-5)\cancel{(n-4)}\cancel{(n-3)}\cancel{(n-2)}} \right\}^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n-5} \right)^n \qquad (1^\infty)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{n-1}{n-5} - 1 \right)^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{4}{n-5} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n-5} \right)^{\frac{n-5}{4}} \right]^{\frac{4n}{n-5}}$$

$$= e^4.$$

Utilizarea derivatei întâi în studiul funcțiilor

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval și $f: I \to \mathbb{R}$ funcție.

- f este monoton crescătoare pe I dacă
  $x < y$ in $I \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f este monoton descrescătoare pe I dacă
  $x < y$ in $I \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Prop: Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ derivabilă,
- f este monoton crescătoare pe $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$
- f este monoton descrescătoare pe $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I$

Obs: Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I: $\forall x < y$ in $I \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I: $\forall x < y$ in $I \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Intervale de monotonie

Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul I, putem stabili intervalele de monotonie pentru funcția f astfel:

- rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ pe I.
- stabilim semnul funcției f' pe intervalele pe care aceasta nu se anulează
- construim tabelul de variație al lui f pe I, și din el deducem intervalele de monotonie pentru f.

Obs: După ce am construit tabelul de variație al lui f, putem folosi informația din el pentru:
- a demonstra inegalități (folosindu-ne de faptul că știm cum variază f).
- pentru a testa injectivitatea / surjectivitatea / bijectivitatea lui f
- pentru a vedea de câte ori ia funcția f o anumită valoare dată
- etc.

Ex. Să studiem monotonia funcției
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3 - 12x$.

Avem
$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
$$= 3(x^2 - 4)$$
$$= 3(x-2)(x+2)$$
$$f'(x) = 0 \iff x \in \{-2, 2\}.$$

Tabel de variație:

x	$-\infty$		-2		2		∞
$f'(x)$		$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$.

Putem deduce, de exemplu, că f ia valorile din $(-\infty; -16)$ o singură dată, $\{\pm 16\}$ de două ori, valorile din $(-16, 16)$ de 3 ori, iar valorile din $(16, +\infty)$ o singură dată.

Ex: Să studiem monotonia funcției
$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2 - x - \ln x$.

Avem
$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{2x^2 - x - 1}{x}, \quad x > 0.$$

$2x^2 - x - 1 = 0$. $\quad \Delta = 9 > 0$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} -\frac{1}{2} < 0 \\ 1, > 0. \end{cases}$$

Tabelul de variație:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -$	0	$+\ \ +\ +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$.

In particular, $f(x) \geq 0, \forall x > 0$, adică
$$x^2 \geq x + \ln x, \ \forall x > 0.$$

<u>Ex</u>. Să se determine intervalele de monotonie pentru $f : (-\infty,-1) \cup (-1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Deduceți că

$$f(x) \le -4, \ \forall x < -1$$

$$f(x) \ge 0, \ \forall x > -1.$$

<u>Sol</u>:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1\cdot x^2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x(x+2) = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$. În plus, f' nu este definită în -1.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+ \ +$	0	$-$	|	$-$	0	$+ \ +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$.

pct de maxim pe $(-\infty,-1)$

Val. max: -4

pct de minim pe $(-1,+\infty)$.

Val. min: 0.

Așadar

$$f(x) \le -4, \ \forall x < -1$$

și

$$f(x) \ge 0, \ \forall x > -1.$$

Puncte de extrem

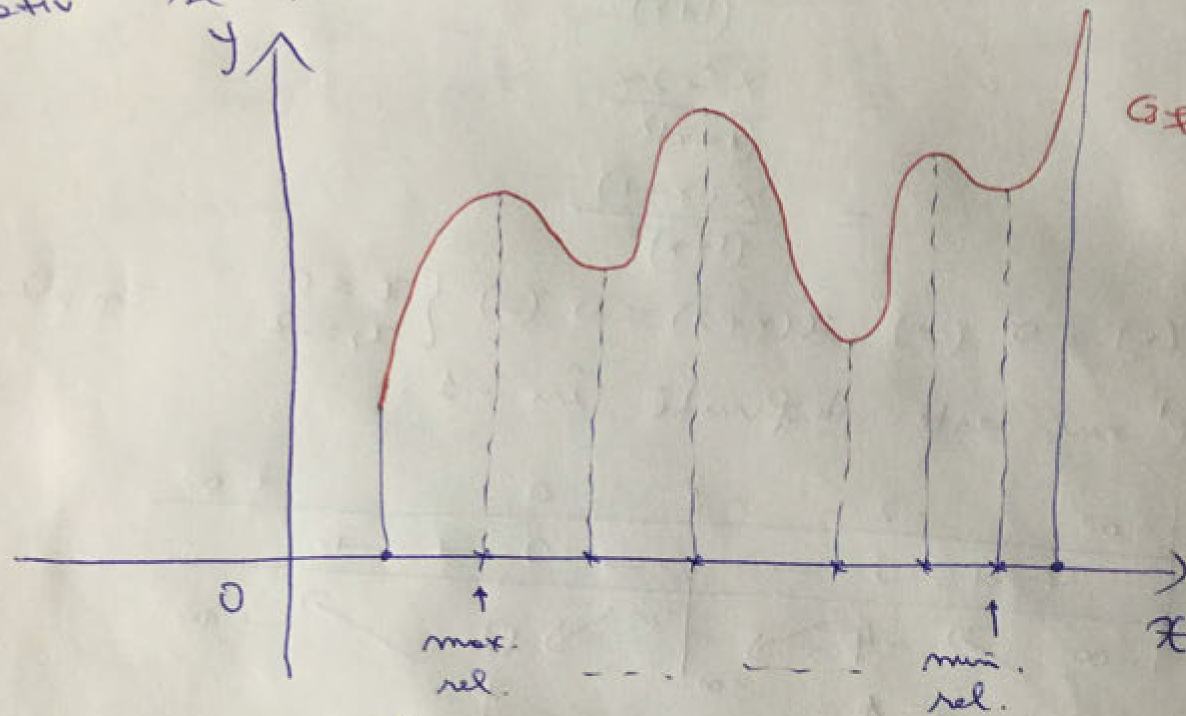
Spunem că $x_0 \in I$ este punct de maxim relativ (local) al lui f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\forall x \in I \cap V).$$

Analog se definește noțiunea de minim relativ (local).

Punctele de maxim sau de minim relativ se numesc puncte de extrem relativ.

Valorile funcției f în punctele de extrem relativ se numesc extremele relative ale funcției.



Teoremă (Fermat)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă în $x_0 \in (a,b)$
x_0: punct de extrem local
$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$

Obs. Punctele de extrem ale unei funcții derivabile se găsesc printre punctele critice (rădăcinile derivatei)

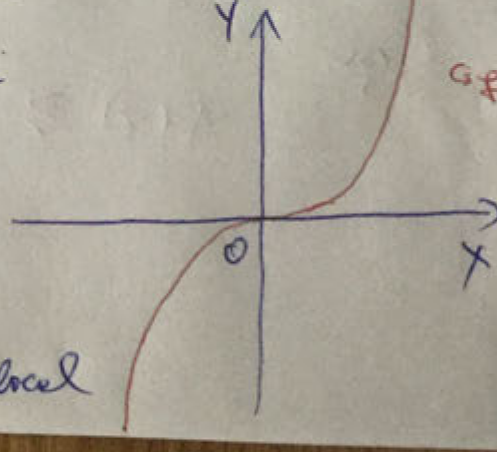
Obs. Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2$

$f(0) = 0$

0: nu este pct de extrem local

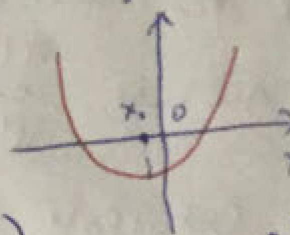


<u>Obs</u>: $I=(a,b)$, $x_0\in I$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile

- $f'(x)<0$ pe (a,x_0), $f'(x)>0$ pe (x_0,b)

  $f'(x_0)=0$.

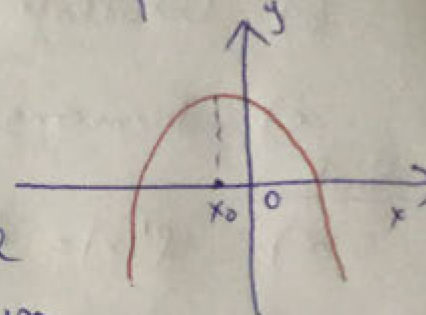
  x_0: pct de minim local.



- $f'(x)>0$ pe (a,x_0), $f'(x)<0$ pe (x_0,b)

  $f'(x_0)=0$.

  x_0: punct de maxim local.



- Așadar avem nevoie de semnul lui f' pentru a decide dacă un punct critic este punct de extrem local.

<u>Ex</u>. Stabiliți numărul de puncte de extrem pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=(x^2-2x+1)e^x.$$

<u>Sol</u>:

$$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x+1)e^x$$

$$=(x^2-1)\underbrace{e^x}_{>0}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x\in\{-1,1\}.$$

Tabel de variație:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

-1: pct de maxim relativ

1: punct de minim relativ $\Rightarrow$

funcția are două puncte de extrem local.

Ex. (MI - test 3) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = 4x - \ln(1+x^2)$$

a) Arătați că
$$f'(x) = \frac{2(2x^2-x+2)}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x+1) - f(x))$

c) Demonstrați că f este bijectivă.

Sol

a) $$f'(x) = 4 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{4+4x^2-2x}{1+x^2}$$ $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$$= \frac{2(2x^2-x+2)}{x^2+1}.$$ $\quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

b) $$\lim_{x \to \infty} \left[(4(x+1) - \ln(1+(1+x)^2)) - (4x - \ln(1+x^2)) \right]$$

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ 4 - \ln \underbrace{\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}}_{\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \to 1} \right]$$ $\quad \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

$$= 4 - \ln 1 = 4.$$

c) $2x^2 - x + 2 = 0$: $\Delta = 1 - 16 < 0 \Rightarrow$ nu avem sol reale

$\Rightarrow 2x^2 - x + 2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$1 + x^2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Bigg| \Rightarrow f'(x) > 0$ pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} (4x - \ln(1+x^2)) = -\infty - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{(4x - \ln(1+x^2))}_{(\infty - \infty)} = \lim_{x \to \infty} x\left(4 - \frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = \infty(4-0) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{L'H}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\cancel{x}}{x\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

Tabel de variație

x	$-\infty$		∞
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$f: (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ continuă și strict crescătoare, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijectivă!

Ex. (MI - Test 7) Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x\ln x.$$

a) Arătați că

$$f'(x)=1+\ln x,\ \forall x>0.$$

b) Determinați $m\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul lui f în punctul $M(m, f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație

$$y=2x$$

c) Demonstrați că $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0,\ \forall x>0.$

Sol:

$(uv)'=u'v+uv'$

a) $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$

$=\ln x+1,\ \forall x>0.$

b) Avem ecuația

drepte paralele $\Leftrightarrow$ pantele egale

$f'(m)=2$, cu $m>0$.

$$\begin{cases}\ln m+1=2 \\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow \ln m=1\Leftrightarrow m=e^1=e.$$

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1$

$x>0 \quad \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.

Tablou de variație:

x	0		$\frac{1}{e}$			$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -$	0	$+\ +$		$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$		$+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x \underset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(-x)=0.$$

Așadar $x_0=\frac{1}{e}$ punct de minim global pt. f pe $(0,+\infty) \Rightarrow f(x)\geq f(x_0),\ \forall x>0$

$\Rightarrow x\ln x\geq -\frac{1}{e},\ \forall x>0.$

Ex. (M-tehnologic, test 1)

Se consideră $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=2\sqrt{x}(\ln x-1),\ \forall x>0.$$

a) Să se arate că

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x},\ \forall x>0.$$

b) Determinați ec. tangentei la G_f în punctul de abscisă $x=\frac{1}{e}$ situat pe G_f.

c) Demonstrați că

$$\sqrt{e}\,f(x)+4\geq 0,\ \forall x\in(0,+\infty)$$

Sol.

$(uv)'=u'v+uv'$

a) $f'(x)=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}(\ln x-1)+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$

$$=\frac{\sqrt{x}(\ln x-1)+2\sqrt{x}}{x}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x}.$$

b) $$f\left(\frac{1}{e}\right)=2\sqrt{\frac{1}{e}}(-1-1)=-\frac{4}{\sqrt{e}}$$

Ec. tangentă:

$$y-f\left(\frac{1}{e}\right)=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)$$

$$y+\frac{4}{\sqrt{e}}=0\left(x-\frac{1}{e}\right)$$

$$y=-\frac{4}{\sqrt{e}}.$$

c) Tabelul de variație:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$x>0$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow$

$\ln x+1=0$

$\Leftrightarrow$

$x=\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}\ln x=0$ (de ce?)

$\frac{1}{e}$: punct de minim global pentru f pe $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$

$$f(x)\geq-\frac{4}{\sqrt{e}},\ \forall x>0.$$

Deci

$$\sqrt{e}\,f(x)+4\geq 0,\ \forall x>0.$$

Ex: (M.I, test 5). Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = e^x(x^2 - 4x + 1).$$

a) Arătați că
$$f'(x) = e^x(x-3)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2020$.

c) Determinați valorile reale ale lui a știind că graficul lui f intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în exact 3 puncte.

Sol:

a) $f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 1) + e^x(2x - 4)$
$$= e^x(x^2 - 2x - 3) = e^x(\underbrace{x^2}\underbrace{-2x}\underbrace{-2}\underbrace{-1})$$
$$= e^x((x-1)(x+1) - 2(x+1))$$
$$= e^x(x+1)(x-3).$$

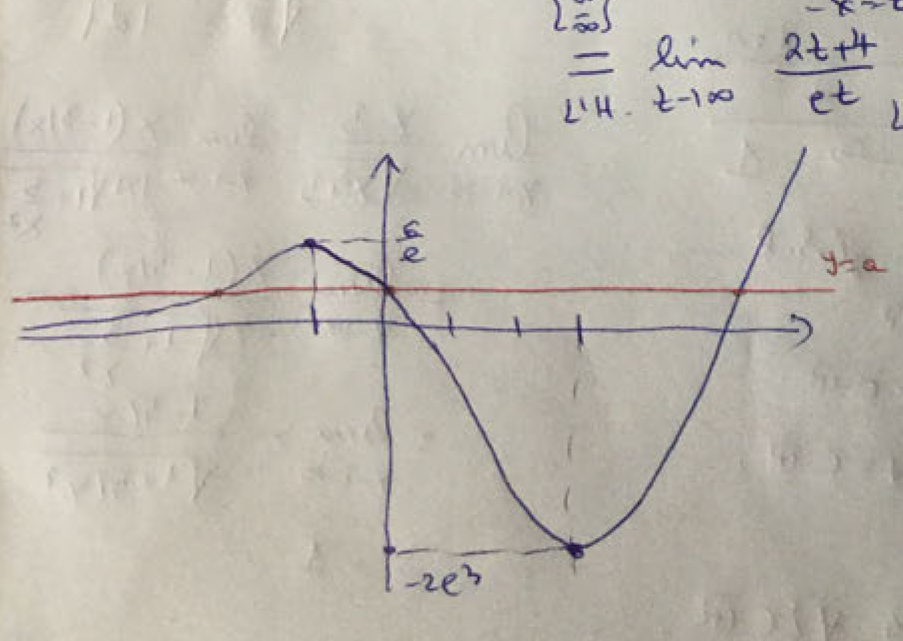
$(uv)' = u'v + uv'$

b) Panta dreptei $y = 2000$ este $m = 0$. Atunci
$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$
abscise puncte în care tg la G_f este orizontală

c) Tabelul de variație.

x	$-\infty$		-1		$+3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+ +$	0	$- -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{6}{e}$	$\searrow$	$-2e^3$	$\nearrow$	∞

$$\lim_{x \to -\infty} e^x(x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{e^{-x}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^2 + 4t + 1}{e^t}$$
$-x = t$
$$\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\underset{L'H.}{=}} \lim_{t \to \infty} \frac{2t + 4}{e^t} \underset{L'H.}{=} \lim_{t \to \infty} \frac{2}{e^t} = 0.$$



Sol:
$$a \in \left(0, \frac{6}{e}\right)$$

Ex. (M1 - test 15).

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}.$$

a) Arătați că $f'(x)=\frac{3(x+1)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^x$$

c) Arătați că $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Sol.

a) $$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3}}(x-3)}{(x^2+3)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$$

$$=\frac{(x^2+3)-x(x-3)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}=\frac{3x+3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$$

b) $$f(x)^x=\left(1+\frac{x-3-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}\right)^x \quad (1^{+\infty})$$

$$=\left[\left(1+\frac{x-3-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}\right)^{\frac{\sqrt{x^2+3}}{x-3-\sqrt{x^2+3}}}\right]^{\frac{x(x-3-\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}}}\longrightarrow e^{-3}.$$

pt $x\to\infty$

$$\frac{x(x-3-\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x((x-3)^2-(x^2+3))}{(x-3+\sqrt{x^2+3})\sqrt{x^2+3}}=\frac{x(-6x+6)}{(x-3+\sqrt{x^2+3})\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}(-6+6/x)}{\cancel{x^2}(1-3/x+\sqrt{1+3/x^2})\sqrt{1+3/x^2}}\to-\frac{6}{2}=-3$$

c) Tabel de variație:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-\,-\,-$	0	$+\,+\,+$	
$f(x)$	-1	$\longrightarrow$	-2	$\longrightarrow$	1

$$\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-3/x)}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-3/x)}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1-3/x}{\sqrt{1+3/x^2}}$$

$$=-1.$$

-1: punct de minim global:

$f(x)\geq-2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$x-3\geq-2\sqrt{x^2+3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$x+2\sqrt{x^2+3}\geq 3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

pt $x=t^5$, $t\in\mathbb{R}$:

$t^5+2\sqrt{t^{10}+3}\geq 3$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Utilizarea derivatei de ordin 2 în studiul funcțiilor

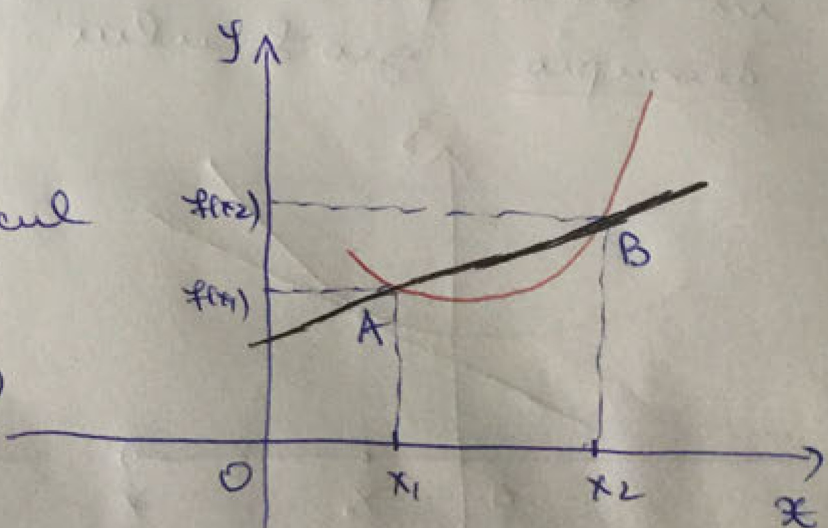
- $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $f: I \to \mathbb{R}$ funcție.
Dacă $f': I \to \mathbb{R}$ există și este derivabilă în $x_0 \in I$, obținem derivata de ordin 2 a funcției f în x_0, notată
$$f''(x_0)$$
- Dacă f este de două ori derivabilă pe I, obținem funcție
$$f'' = (f')' : I \to \mathbb{R}$$

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
$$f'(x) = 1e^x + xe^x = (1+x)e^x$$
$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (1+x)e^x$$
$$= (2+x)e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $f: I \to \mathbb{R}$ s.n. convexă pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in [0,1]$, avem că
$$f((1-t)x_1 + t x_2) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$$

Int. geometrică

$\forall x_1 < x_2$ in I,
pe $[x_1, x_2]$, graficul lui f se află sub coarda AB,



$A = (x_1, f(x_1))$

$B = (x_2, f(x_2))$

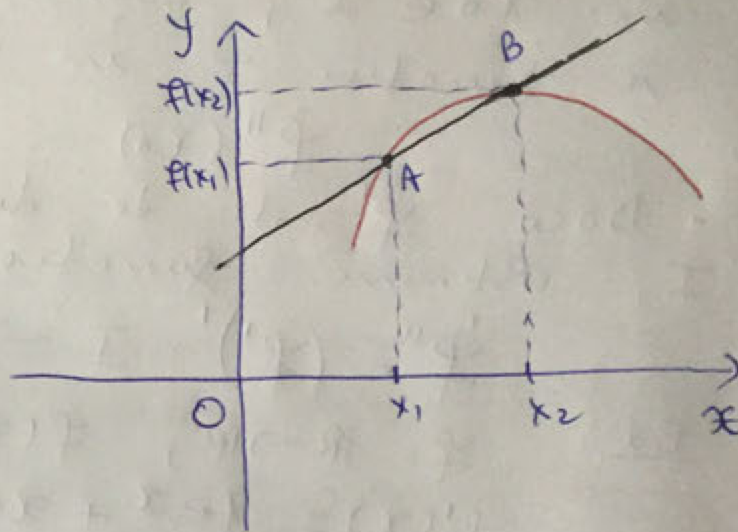
G_f „ține apă”

• $f: I \to \mathbb{R}$ se numește <u>concavă</u> dacă $-f: I \to \mathbb{R}$ este convexă. Echivalent, $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in [0,1]$, avem că

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

<u>Int. geometrică</u>

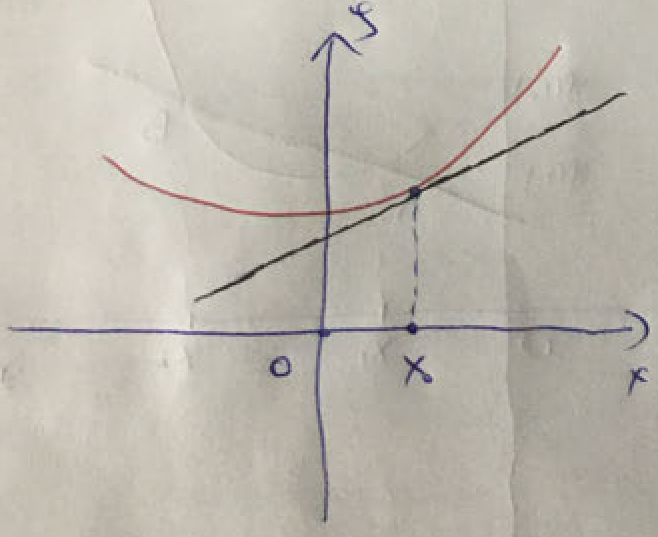
Gf „nu ține apă”



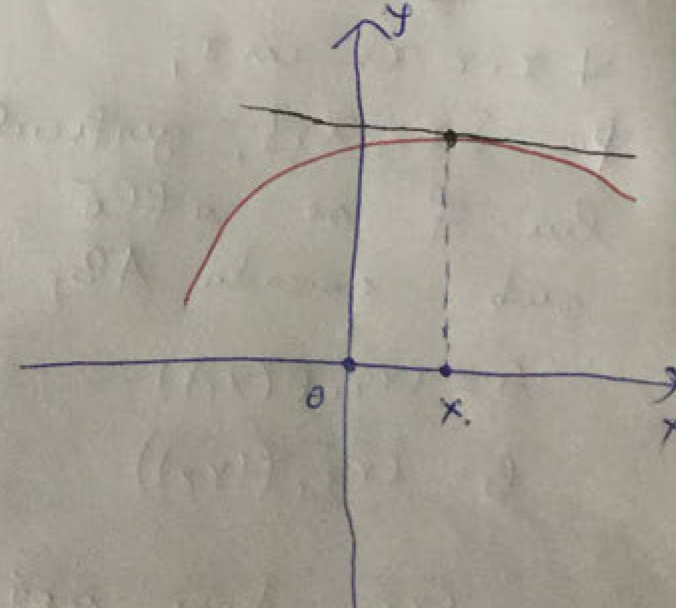
• Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă, atunci

• f este convexă pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află <u>sub</u> grafic

• f este concavă pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află <u>deasupra</u> graficului.



convexitate



concavitate

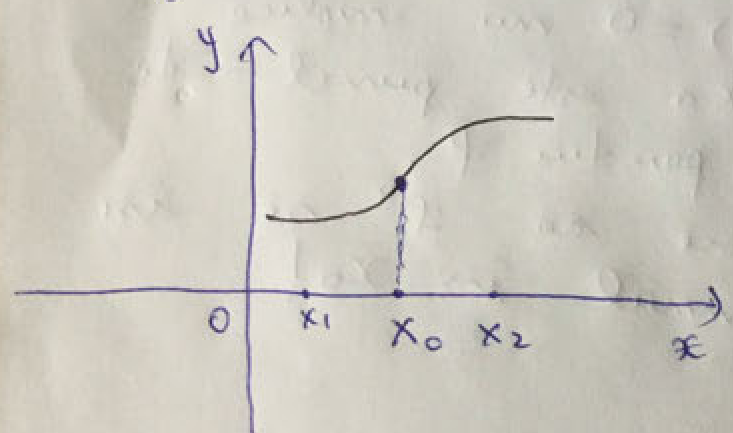
Prop Presupunem că $f: I \to \mathbb{R}$ admite derivată de ordin 2 pe I.

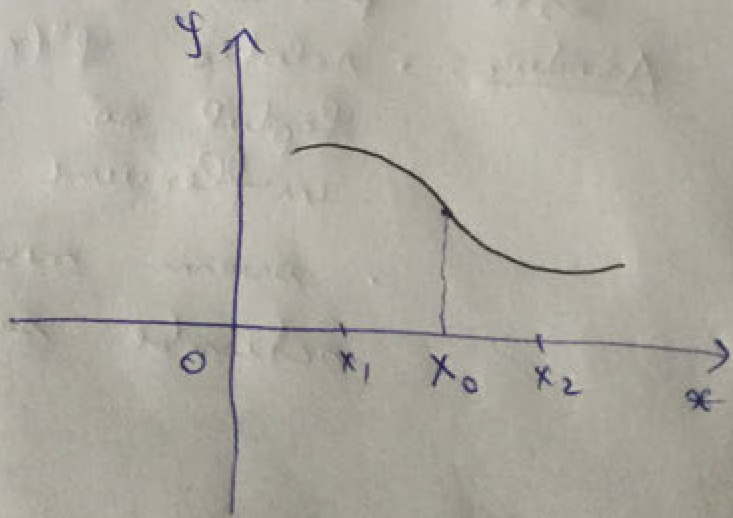
- funcția f este convexă pe intervalul I dacă și numai dacă $\boxed{f''(x) \geq 0,\ \forall x \in I}$
- funcția f este concavă pe intervalul I dacă și numai dacă $\boxed{f''(x) \leq 0,\ \forall x \in I}$

Obs Semnul derivatei de ordin 2 permite determinarea intervalelor de convexitate (respectiv, concavitate) pentru f.

Def $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $f: I \to \mathbb{R}$ continuă
$x_0 \in I$ se numește punct de inflexiune dacă $\exists\ x_1 < x_0 < x_2$ în I a.î.

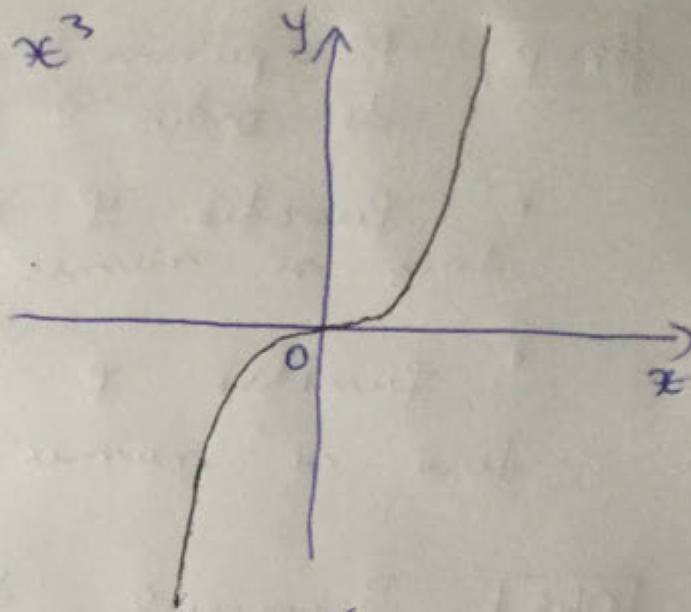
$$\begin{cases} f \text{ convexă pe } (x_1, x_0] \\ f \text{ concavă pe } [x_0, x_2) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} f \text{ concavă pe } (x_1, x_0] \\ f \text{ convexă pe } [x_0, x_2) \end{cases}$$





Obs Dacă $\exists\ f'': I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f''(x_0) = 0$ și f'' schimbă semnul în $x_0 \Rightarrow x_0$ este punct de inflexiune pentru funcția f.

Ex. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$



$f'(x) = 3x^2$

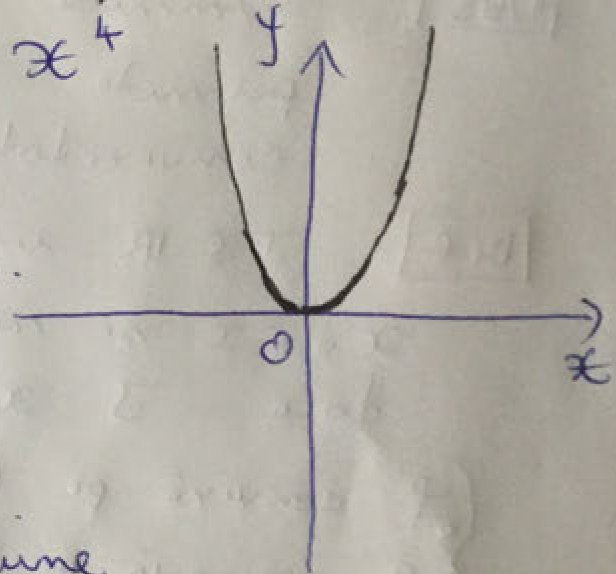
$f''(x) = 6x.$

$f''(x) = 0 \iff x = 0.$

$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ pt } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ pt } x > 0 \end{array}\right| \Rightarrow$

$x_0 = 0$ punct de inflexiune

Ex. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4$



$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(x) = 0 \iff x = 0.$

Dar $f'' \geq 0$ pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

f'' nu schimbă semnul pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ nu este punct de inflexiune

Așadar:
- relația $f''(x_0) = 0$ nu implică faptul că x_0 este punct de inflexiune pentru f.
- avem nevoie ca f'' să își schimbe semnul în x_0!

Ex. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 4.$$

Determinați intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției.

Sol: $f'(x) = 3x^2 - 12x$

$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$

$f''(x) = 0 \iff x = 2.$

Semnul derivatei f'' este dat de tabelul

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	

inflexiune

$x = 2$ punct de inflexiune

f: concavă pe $(-\infty, 2]$

f convexă pe $[2, +\infty)$.

Ex: Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x - \frac{1}{e^x}$$

este concavă pe $\mathbb{R}$.

Sol: $f'(x) = 1 - (e^{-x})'$ $\qquad (e^u)' = e^u \cdot u'$

$= 1 - (-x)' e^{-x}$

$= 1 + e^{-x}$

$= 1 + \frac{1}{e^x}$

$f''(x) = -e^{-x}$

$= -\frac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}$

Cum $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

f concavă pe $\mathbb{R}$.

Ex: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x^2-4x+6)e^x$$

Studiați intervalele de convexitate și de concavitate pentru f.

Sol:

$$f'(x) = (2x-4)e^x + (x^2-4x+6)e^x \qquad (uv)' = u'v + uv'$$

$$= (x^2-2x+2)e^x$$

$$f''(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x$$

$$= x^2e^x$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 0.$$

Avem $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$. Avem $f''(x_0) = 0$, dar x_0 nu este punct de inflexiune pt f.

Ex: Determinați punctele de inflexiune pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+1}.$$

Sol:

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x \cdot 3x}{(x^2+1)^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{3x^2+3-6x^2}{(x^2+1)^2} = 3\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = 3\frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)(2x)\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \qquad (u^2)' = 2uu'$$

$$= 3\frac{-2x\cancel{(1+x^2)}\left[(1+x^2)+2(1-x^2)\right]}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= -6\frac{x(-x^2+3)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$			$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		∞
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$: puncte de inflexiune pentru f

Ex: (St. nat, test 15) Se consideră $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x - (1+x)\ln(x+1)$$

a) Să se arate că

$$f'(x) = 1 - \ln(1+x),\ \forall x > -1$$

b) Determinați intervalele de monotonie pentru f.

c) Demonstrați că f este concavă.

Sol:

a) $f'(x) = 2 - 1\ln(1+x) - \cancel{(1+x)}\cdot\dfrac{1}{\cancel{1+x}}$

$= 2 - \ln(1+x) - 1$

$= 1 - \ln(1+x).$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 1 \Leftrightarrow 1+x = e$

$\Leftrightarrow x = e-1 > 1$

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+\ +$	0	$-\ -\ -$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$f(e-1) = e-2$	$\searrow$	$-\infty$

f: strict crescătoare pe $(-1, e-1)$

strict descrescătoare pe $(e-1, +\infty)$.

c) $f''(x) = -\dfrac{1}{1+x},\ \forall x > -1$

Cum $1+x > 0,\ \forall x > -1 \Rightarrow$

$f''(x) < 0,\ \forall x > -1.$

Așadar f concavă pe $(-1, +\infty)$.

Ex (St mat., test 6). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}5x-3, & x\in(-\infty,1)\\ x^2-x+\sqrt{x^2+3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

a) Arătați că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Arătați că pentru orice $a>1$, tangenta la graficul lui f în $A(a,f(a))$ nu este paralelă cu axa Ox.

c) Demonstrați că f este convexă pe $(1,+\infty)$.

Sol: a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(5x-3)=2$

$f(1)=1-1+\sqrt{4}=2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=2$

$\Rightarrow$ f cont în 1

f elementară pe $(-\infty,1)\Rightarrow$ f cont pe $(-\infty,1)$

f elementară pe $(1,+\infty)\Rightarrow$ f cont. pe $(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ f cont. pe $\mathbb{R}$.

b) Trebuie arătat că $f'(a)\neq 0$, $\forall a>1$.

$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\forall x>1$, $f'(x)=2x-1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3}}$

$$=\underbrace{(2x-1)}_{>1}+\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}_{>0}>1>0.$$

Așadar $f(x)\neq 0$, $\forall x>1$.

c) Pentru $x>1$,

$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f''(x)=2+\frac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3}}\cdot x}{(x^2+3)}$$

$$=2+\frac{(x^2+3)-x^2}{\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)}$$

$$=2+\frac{3}{\underbrace{\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)}_{>0}}$$

>0.

Așadar f convexă pe $(1,+\infty)$.

Ex (Tehnologic, test 9) Se consideră $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-2}.$$

a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x_0=3$, situat pe graficul lui f.

c) Demonstrați că f' este crescătoare pe $(2,+\infty)$.

Sol: a)

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-2)-1\cdot(x-1)^2}{(x-2)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$=\frac{(x-1)(2x-4-x+1)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

b)

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$x_0=3$

$f(x_0)=4$

$f'(x_0)=0$

$$y-4=0(x-3)$$

$$\boxed{y=4}$$

c) f' este crescătoare pe $(2,+\infty)$ dacă $\underset{(f')'}{f''}$ este pozitivă pe $(2,+\infty)$.

Sau,

$$f'(x)=\frac{\{(x-2)+1\}\{(x-2)-1\}}{(x-2)^2}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}=1-\frac{1}{(x-2)^2}$$

$g(x)=(x-2)^2$ pozitivă și crescătoare pe $(2,+\infty)$

$\Rightarrow \frac{1}{g(x)}$: descrescătoare pe $(2,+\infty)$

$\Rightarrow -\frac{1}{g(x)}$: crescătoare pe $(2,+\infty)$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{g(x)}$: crescătoare pe $(2,+\infty)$.

Asimptote la graficul unei funcții

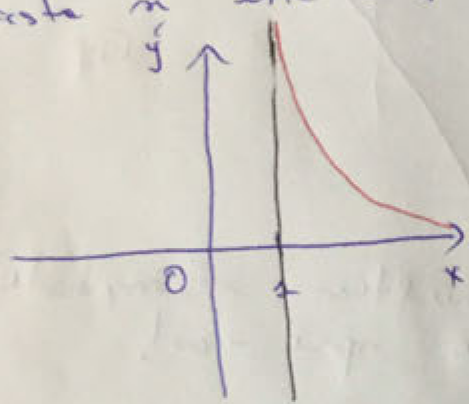
Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $x_0 \in I'$ și $f: I \to \mathbb{R}$ funcție.

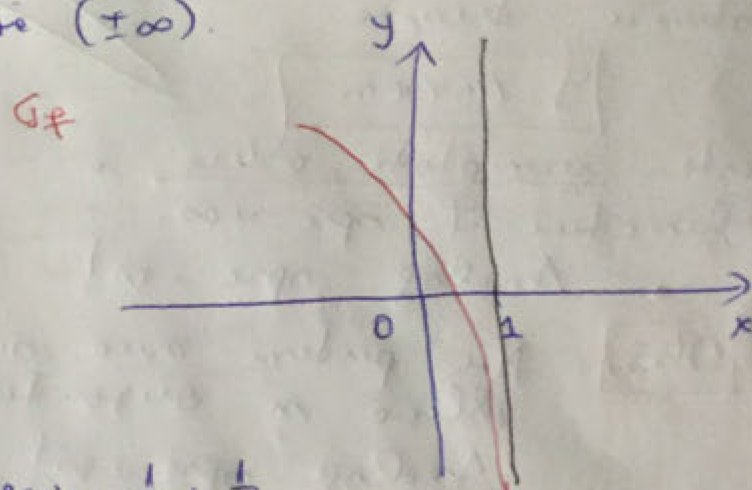
$\boxed{x_0 \in \mathbb{R}}$: (Asimptote verticale)

Dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală a funcției f dacă cel puțin una din limitele laterale

$\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ sau $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$

există și este infinită ($\pm\infty$).





Ex. $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

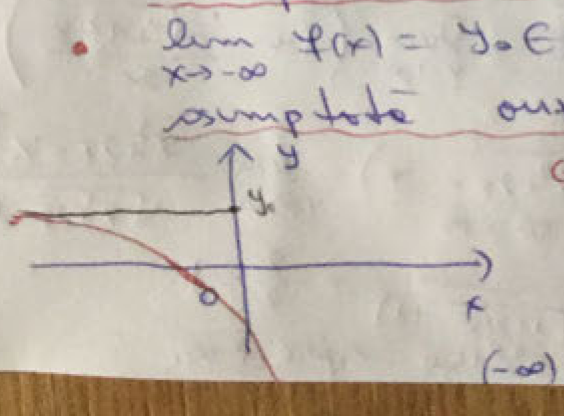
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1+x}{x^2} = \frac{1}{0_+} = +\infty$ $\quad -\infty + \infty$

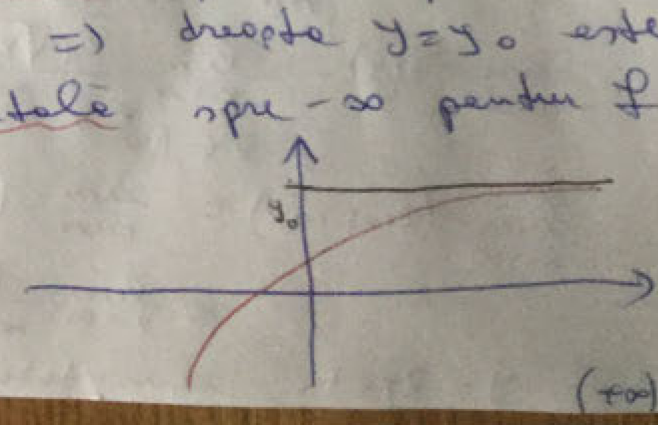
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$. $\quad \infty + \infty$

$x = 0$: asimptotă verticală (bilaterală)

$\boxed{x_0 \in \{\pm\infty\}}$ (Asimptote orizontale / oblice)

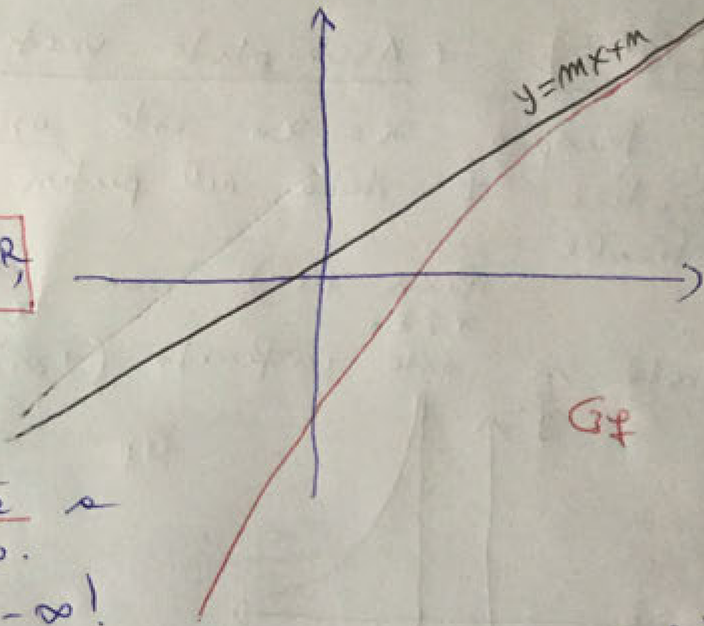
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ dreapta $y = y_0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ pentru f
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ dreapta $y = y_0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ pentru f





Ex. $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}=0$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}=0$ $\Big\} \Rightarrow y=0$: asimptotă orizontală (spre $-\infty$ și spre $+\infty$)



- Dacă există

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}^*}$

și

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=n\in\mathbb{R},}$

atunci dreapta

$\boxed{y=mx+n}$

este asimptotă oblică a funcției f spre $+\infty$.

- Analog spre $-\infty$!

Obs Nu putem avea simultan asimptotă oblică și orizontală spre $+\infty$!
Analog spre $-\infty$!

Ex $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{(x+\sqrt{x^2+2x})}_{-\infty+\infty.}=\lim_{\substack{z=-x\\ z\to\infty}}(-z+\sqrt{z^2-2z})$

$=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2-2z-z^2}{z+\sqrt{z^2-2z}}=\lim_{z\to\infty}\frac{-2z}{z(1+\sqrt{1-\frac{2}{z}})}$

$=-\frac{2}{2}=-1.$

$y=-1$: asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+2x})=\infty+\infty=+\infty.\Rightarrow$
nu există asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x\sqrt{1+2/x}}{x}\right)$
$=2\in\mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\underbrace{(\sqrt{x^2+2x}-x)}_{\infty-\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(\sqrt{1+2/x}+1)}=\frac{2}{2}=1.$

$y=2x+1$: asimptotă oblică spre $+\infty$.

Ex (M I - test 4). Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x,\ \forall x>0$$

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2},\ \forall x>0.$

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că graficul lui f nu intersectează axa Ox.

Sol. a) $$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$$

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{2x+x(x+1)-(x+1)^2}{x(1+x)^2}$$

$$=\frac{2x+x^2+x-(x^2+2x+1)}{x(1+x)^2}=\frac{x-1}{x(1+x)^2}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}+\underbrace{\ln(1+x)-\ln x}\right]$$

$$\frac{\infty}{\infty}+\underbrace{\infty-\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\ln a-\ln b = \ln\frac{a}{b}$$

$$= 1+\ln 1=1.$$

$y=1$: ec. as. orz. la $+\infty$.

c) Trebuie arătat că nu există $x>0$ astfel încât $f(x)=0$. Tabel de variație

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\underbrace{\ln 2}_{\in(0,1)}$	$\nearrow$	1

Rezultă că $f(x)\geq \ln 2>0,\ \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow f(x)\neq 0,\ \forall x>0.$

Ex. (MJ - test 2) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{e^x}.$$

a) Să se arate că

$$f'(x) = \frac{-(x+2)x}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul lui f

c) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} (g(1)+g(2)+\ldots+g(n)) = \frac{1}{e-1},$$

unde $g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{(x+2)^2}$.

Sol.

a) $$f'(x) = \frac{(2x+4)e^x - e^x(x^2+4x+4)}{e^{2x}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\cancel{e^x}(-x^2-2x)}{\cancel{e^{2x}}_{e^x}} = -\frac{x(x+2)}{e^x}.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+4}{e^x} \underset{L'H.}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2x+4}{e^x}$$

$$\underset{L'H.}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

$y=0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ la G_f.

c) $$f(x) = \frac{(x+2)^2}{e^x} \Rightarrow g(x) = \frac{(x+2)^2}{e^x(x+2)^2} = \frac{1}{e^x}, \forall x>0$$

Avem că

$$g(1)+\ldots+g(n) = \frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\ldots+\frac{1}{e^n}$$

$$= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{e}+\ldots+\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$\left[\begin{array}{c} 1+q+\ldots+q^n \\ \| \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}\right)$$

$$\left[\begin{array}{c} |q|<1 \Rightarrow \\ q^n \to 0 \end{array}\right]$$

$$\to \frac{1}{e}\frac{1}{1-\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{e}{e(e-1)} = \frac{1}{e-1}.$$

Ex. (M - St. Naturii, test 1) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 3

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}.$$

a) Să se arate că

$$f'(x) = \frac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Determinați asimptotele spre $+\infty$ la G_f.

c) Demonstrați că

$$-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{10}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sol:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

a)
$$f'(x) = \frac{x^2+5-2x(x-2)}{(x^2+5)^2}$$
$$= \frac{x^2+5-2x^2+4x}{(x^2+5)^2}$$
$$= \frac{-x^2+4x+5}{(x^2+5)^2}$$
$$= -\frac{(x-5)(x+1)}{(x^2+5)^2}$$
$$= \frac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$$

$-x^2+4x+5=0.$

$\Delta = 16+20=36$

$x_{1,2} = \frac{-4\pm 6}{-2} \to 5,\ -1$

sau

$-x^2+4x+5$
$\underset{4+1}{\wedge}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(1-2/x)}{\cancel{x^2}\,x\,(1+5/x^2)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

$y=0$: asimptotă la $+\infty$.

c) Tabel de variație:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$- -$	0	$+ +$	0	$- - -$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{10}$	$\searrow$	0

Avem

$$f(x) \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right\}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{10}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ex (M.I. - test 8) Fie $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x^4 - 4\ln x$.

a) Să se arate că

$$f'(x) = \frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}, \forall x>0.$$

b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul lui f.

c) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuația

$$f(x) - n = 0$$

are două soluții reale distincte.

Sol.

a) $f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x} = 4\,\frac{x^4-1}{x}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= \frac{4(x^2-1)(x^2+1)}{x} = \frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}, \forall x>0.$$

b) Avem

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0 - 4(-\infty) = +\infty.$$

$x=0$: asimptotă verticală către $+\infty$.

c) Tabel de variație:

x	0		1			$+\infty$
$f'(x)$		$- \; -$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$		$+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} (x^4 - 4\ln x) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(1 - \frac{\ln x^4}{x^4}\right) = \infty(1-0) = +\infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

Din tabelul de variație deducem că $\forall \alpha > 1$, ecuația $f(x) = \alpha$ are exact două soluții reale distincte. În particular, $\forall n \geq 2$ în $\mathbb{N}$ avem că ecuația $f(x) = n$ are două soluții reale distincte.

Ex: (St. nat, test 13). Se consideră $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

a) Arătați că
$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}},\ \forall x>1$$

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$, situat pe graficul lui f.

c) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asimptote ale graficului funcției f.

Sol: a)
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$=-\frac{\cancel{2}\sqrt{x-1}}{\cancel{2}\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{x-1=(\sqrt{x-1})^2},\ x>1.$$

$$=\frac{-1}{(x-1)\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}},\ \forall x>1.$$

b) $f(x_0)=\sqrt{3}$, $f'(x_0)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ec tang: $y-\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$.

c)
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\cancel{x}(1+1/x)}{\cancel{x}(1-1/x)}}=1$$

$\boxed{y=1}$: asimptotă orizontală la $+\infty$

Nu avem asimptotă oblică la $+\infty$.

Asimptotă verticală în $x=1$:

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt{\frac{2}{0_+}}=+\infty.\Rightarrow$$

$\boxed{x=1}$: asimptotă verticală către $+\infty$.

Coordonatele punctului de intersecție al asimptotelor:

$$A(1,1).$$

Ex (Tehnologic, test 4). Se consideră $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+1}.$$

a) Arătați că
$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \ \forall x > -1.$$

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul lui f.

c) Demonstrați că f este convexă.

Sol: a) $$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+1) - 1\cdot(x^2+4x+4)}{(x+1)^2}$$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$= \frac{2x^2+6x+4 - x^2 - 4x - 4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \ \forall x > -1.$$

b) $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+4}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+4/x+4/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x)} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+4x+4}{x+1} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+4-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(3+4/x)}{\cancel{x}(1+1/x)} = 3.$$

$\boxed{y = x+3}$ asimptotă oblică spre $+\infty$.

c) $$f''(x) = \left(\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x+1)\left[(x^2+2x+1) - (x^2+2x)\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3}, \ \forall x > -1.$$

Atunci $f''(x) > 0, \ \forall x > -1 \Rightarrow f$ convexă pe $(-1, +\infty)$.