https://math.univ-ovidius.ro/default.aspx?cat=BAC&subcat=2020

Matrice, determinanţi, sisteme de ecuaţii liniare

1 Matrice

Matrice cu m linii şi n coloane cu elemente numere reale ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (complexe ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$) sau întregi ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$)):

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.1. (1) $m=2, n=3$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

(2) $m=3, n=2$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

(3) $m=3, n=3$ ($m=n$: Matrice **pătrată** de ordinul n)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

2 Operaţii cu matrice

2.1 Două matrice cu acelaşi număr de linii şi coloane se pot aduna. Rezultatul este o matrice de acelaşi tip

$$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), A = (a_{ij}), B = (b_{ij}),$$
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Exemplu 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+6 & -4+8 & 0-3 \\ -1+2 & 0+1 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Proprietăţi ale adunării matricelor

(1) Asociativitate:

$$\forall\, A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), (A + B) + C = A + (B + C).$$

(2) Comutativitate:

$$\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), A + B = B + A.$$

(3) Element neutru $0_{m\times n}$:

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A.$$

(4) Orice matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ are un opus $-A = (-a_{ij})$:

$$A + (-A) = 0_{m\times n} = (-A) + A = 0_{m\times n}.$$

2.3 Înmulţirea cu scalari

$$a \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), A = (a_{ij}),\ \text{atunci}\ aA = (aa_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Exemplu 2.2.

$$3A = 3\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-4) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & *\\ * & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & *\\ * & *\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}5\cdot1+6\cdot3 & *\\ * & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & *\\ * & *\end{pmatrix}$$

$$AB\neq BA$$

$AB=BA$: A, B comută

$$A^m\cdot A^n=A^n\cdot A^m,\ \forall\, m,n\geq 1$$

2.4 Înmulţirea matricelor

$A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), B=(b_{jk})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), AB=(c_{ik})\in\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$

$$\forall\, 1\leq i\leq m, 1\leq k\leq p,\ c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}.$$

Dacă AB există, nu rezultă că există şi BA!

Cazul cel mai frecvent: matricele pătrate.

$$A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B=(b_{jk})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$AB=(c_{ik})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), BA\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Dar, în general,

$$AB\neq BA!$$

2.5 Proprietăţile înmulţirii matricelor pătrate

(1) Asociativitate:

$$\forall\, A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (AB)C=A(BC).$$

(2) Element neutru, $I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$:

$$\forall\, A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AI_n=I_nA=A.$$

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(3) Înmulţirea matricelor pătrate este distributivă faţă de adunarea lor:

$$\forall\, A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A(B+C)=AB+AC \text{ şi } (A+B)C=AC+BC.$$

Regula lui Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - (ceg + fha + ibd)$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array}$$

Regula triunghiului:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} aei \\ dhc \\ bfg \end{array} \qquad \begin{array}{c} -ceg \\ -fha \\ -ibd \end{array} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

3 Determinanţi

Determinantul unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este un **număr.**

$n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemplu 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 2 = 12 + 4 = 16.$$

$n = 3$: Regula lui Sarrus sau regula triunghiului.

Exemplu 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \cdot (-1) - (0 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot 1) =$$
$$= 8 + 0 + 0 - (0 - 4 - 4) = 8 - (-8) = 8 + 8 = 16.$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot}_{= 0} \Big|$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{x I_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = x I_2 + B \; ; \qquad = 2I_2 + B$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9I_2$$

$$A(a-x) + A(a+x) = \underbrace{(a-x)I_2 + B}_{A(a-x)} + \underbrace{(a+x)I_2 + B}_{A(a+x)} = (a - \cancel{x} + a + \cancel{x})I_2 + 2B =$$

$$= 2a\,I_2 + 2B = 2(aI_2 + B) = 2A(a)$$

$$(2)\cdot A(2) = (2I_2 + B)^2 = 4I_2 + 4B + B^2$$

$$\cdot A(2) - 4A(2) + 13I_2 = 4I_2 + 4B + B^2 - 4(2I_2 + B) + 13I_2 =$$

$$4I_2 + \cancel{4B} + \underbrace{B^2}_{-9I_2} - 8I_2 - \cancel{4B} + 13I_2 = 4I_2 - 9I_2 - 8I_2 + 13I_2 = O_2$$

$$\det A(x) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 3\cdot(-3) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$A(2020-x) + A(2020+x) = \begin{pmatrix} 2020-x & 3 \\ -3 & 2020-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2020+x & 3 \\ & 2020+x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2020 - \cancel{x} + 2020 + \cancel{x} & 3+3 \\ -3-3 & 2020 - \cancel{x} + 2020 + \cancel{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4040 & 6 \\ -6 & 4040 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} 2020 & 3 \\ -3 & 2020 \end{pmatrix} = 2A(2020)$$

$$\begin{pmatrix} 4040 & 7 \\ 5 & 4040 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2020 & 2 \\ \frac{5}{2} & 2020 \end{pmatrix}$$

c) $A(n)\cdot A(2-n) =$

$$= \begin{pmatrix} n & 3 \\ -3 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-n & 3 \\ -3 & 2-n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n(2-n) + 3\cdot(-3) & 3n + 3(2-n) \\ -3(2-n) - 3n & -3\cdot 3 + n(2-n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n^2+2n-9 & 6 \\ -6 & -n^2+2n-9 \end{pmatrix}$$

$$-6 + \cancel{3n} - \cancel{3n} \Rightarrow \begin{pmatrix} -n^2+2n-9 & 6 \\ -6 & -n^2+2n-9 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -n^2+2n-9 & 6 \\ -6 & -n^2+2n-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -n^2+2n-9 = -12 \\ 6 = 6 \checkmark \\ -6 = -6 \checkmark \end{cases} \Leftrightarrow -n^2+2n-9 = -12$$

$$-n^2+2n-9 = -12$$

$$-n^2+2n+3 = 0$$

$$n_1 = -1, \; n_2 = 3$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{n = 3}$$

$n = -1$ nu convine

Exercițiu 3.3. (SN) Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Arătați că $\det(A) = x^2 + 9$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(b) Demonstrați că $A(2020 - x) + A(2020 + x) = 2A(2020)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(c) Determinați numărul $n \in \mathbb{N}$, pentru care $A(n)A(2-n) = 2A(-6)$.

Alte cerințe

(a') Arătați că $\det(A) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(b') Demonstrați că $A(a - x) + A(a + x) = 2A(a)$, pentru orice $a, x \in \mathbb{R}$.

(c') Demonstrați că $A(2)\cdot A(2) - 4A(2) + 13I_2 = O_2$.

Exercițiul 3.4. (SN) Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Arătați că $\det(A(x)) = 6^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(b) Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că $A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x)$.

(c) Demonstrați că orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are două elemente numere iraționale.

Alte cerințe

(a') Arătați că $\det(A(x)) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(b') Arătați că $A(x)A(y) = A(x+y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(c') Calculați $A(1)^{2020}$.

a) $\det A(x) = \begin{vmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{vmatrix} = 2^x \cdot 3^x - 0 = 6^x$

b) $\begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^x \checkmark \\ 2^x = 3^x \\ 0 = 0 \checkmark \\ 3^x = 3^x \checkmark \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 3^x$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

c) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $\quad X^2 = A(1) \Leftrightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$X^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ xz+tz & yz+t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2+yz = 2 \checkmark \\ y(x+t) = 0 \\ z(x+t) = 0 \\ yz + t^2 = 3 \end{cases}$

$2-3=-1$

Din ec. (1)+(4) $\Rightarrow x^2 - t^2 = -1$

$(x-t)(x+t) = -1 \Rightarrow x+t \neq 0 \Rightarrow$ ec. (2),(3) $\Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow x^2 = 2, t^2 = 3$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$ 4 soluții cu $x, t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^y & 0 \\ 0 & 3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x \cdot 2^y & 0 \\ 0 & 3^x \cdot 3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 \\ 0 & 3^{x+y} \end{pmatrix} = A(x+y)$

Prin inducție după $n \geq 2 \Rightarrow A(x_1) \cdot A(x_2) \cdots A(x_n) = A(x_1 + \cdots + x_n)$

$n = 2$ (b'); $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $\quad P(k): A(x_1) \cdot A(x_2) \cdots A(x_k) = A(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$

$P(k+1): \underbrace{A(x_1) \cdots A(x_k)}\, A(x_{k+1}) = A(x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1})$

$A(x_1 + \cdots + x_k) \cdot A(x_{k+1}) \overset{(b')}{=} A((x_1 + \cdots + x_k) + x_{k+1})$

$A(1)^{2020} = \underbrace{A(1) \cdots A(1)}_{2020 \text{ ori}} = A(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{2020}) = \underbrace{A(2020)} = \begin{pmatrix} 2^{2020} & 0 \\ 0 & 3^{2020} \end{pmatrix}$

Dacă X verifică $X^2 = A(1) \Rightarrow X^3 = A(1)X = XA(1)$ comută cu $A(1)$. Soluțiile X tb. căutate printre matricele care comută cu $A(1)$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \Rightarrow$

$X^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$

$X^2 = A(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm\sqrt{2} \\ t = \pm\sqrt{3} \end{matrix}$

$\Rightarrow x, t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

a) $\det A(1) = \begin{vmatrix} 1-10 & 8 \\ -5 & 1+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 8 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -9\cdot 5 - 8\cdot(-5) =$

$= -45 + 40 = -5.$

b) $A(a)\cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1-10a & 8a \\ -5a & 1+4a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-10b & 8b \\ -5b & 1+4b \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (1-10a)(1-10b)+8a\cdot(-5b) & (1-10a)8b+8a(1+4b) \\ -5a(1-10b)+(1+4a)(-5b) & -5a\cdot 8b+(1+4a)(1+4b) \end{pmatrix}$

$= \dots = \begin{pmatrix} 1-10(a+b-6ab) & 8(a+b-6ab) \\ -5(a+b-6ab) & 1+4(a+b-6ab) \end{pmatrix} = A(a+b-6ab)$

$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10a & 8a \\ -5a & 4a \end{pmatrix} = I_2 + a\underbrace{\begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}_{B}$

$A(a)\cdot A(b) = (I_2+aB)(I_2+bB) =$

$= I_2 + bB + aB + abB^2 = I_2 + aB + bB - 6abB =$

$= I_2 + (a+b-6ab)B = A(a+b-6ab)$

b) $A(m)\cdot A(n) = A(m+n-6mn)$

$\left.\begin{array}{l} A(m+n-6mn) = A(6-5mn) \\ \text{Obs. } A(x)=A(y) \Leftrightarrow x=y \end{array}\right\} \Rightarrow m+n-6mn = 6-5mn$

$m+n-mn = 6$

$m(1-n)+m-1 = 6-1$

$m(1-n)-(1-n) = 5$

$(m-1)(1-n) = 5$

$5 = 1\cdot 5$
$5\cdot 1$
$-1\cdot(-5)$
$-5\cdot(-1)$

1.) $m-1=1$, $1-n=5$; $m=2$, $n=-4$ Nu

2.) $m-1=5$, $1-n=1$ $\Rightarrow \boxed{m=6}$ $\Rightarrow \boxed{n=0}$

3) $m-1=-1$, $1-n=-5$; $\boxed{m=0}$, $\boxed{n=6}$

4) $m-1=-5$, $1-n=-1$; $m=-4$ Nu

$m=6$ şi $n=0$

$m=0$ şi $n=6$

Exercițiu 3.5. (Teh) Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} 1-10a & 8a \\ -5a & 1+4a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Arătați că $\det(A(1)) = -5$.

(b) Demonstrați că $A(a)\cdot A(b) = A(a+b-6ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Determinați numerele $m, n \in \mathbb{N}$, pentru care $A(m)A(n) = A(6-5mn)$.

Alte cerințe

(a') Calculați $\det(A(a))$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$. $\det A(a) = 1-6a \neq 0$ pt $a \neq \frac{1}{6}$

(b') Pentru ce valori reale ale lui a avem $\det(A(a)) \neq 0$?

(c') Pentru ce valori reale/ întregi ale lui a avem $A(a)\cdot A(a) = A(-4)$?

$-\frac{2}{3}$ nu convine

$B^2 = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & -48 \\ 30 & -24 \end{pmatrix} =$

$= 6\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = -6B$

$A(a)\cdot A(a) \overset{(b)}{=} A(a+a-6a^2) = A(-4) \Leftrightarrow$

$[A(x)=A(y) \Leftrightarrow x=y]$

$\Leftrightarrow 2a-6a^2 = -4 \Leftrightarrow 6a^2-2a-4=0 \mid :2$

$3a^2-a-2=0$ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

a) $\det A(a) = \begin{vmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A(1) = 1$

b) $A(a) \cdot A(b) = A(a+b)$

c) Dem. prin inducție după $n \geq 2$:

$\boxed{A(a_1)A(a_2)\cdots A(a_n) = A(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$ ✓

Verificare: $n=2$ $A(a_1)\cdot A(a_2) = A(a_1+a_2)$: am dem. la (b)

$P(k)$ adev: $A(a_1)A(a_2)\cdots A(a_k) = A(a_1+a_2+\cdots+a_k)$

Dem: $P(k+1)$: $A(a_1)\cdots A(a_k)A(a_{k+1}) = A(a_1+\cdots+a_k+a_{k+1})$

$\underbrace{A(a_1)\cdots A(a_k)}A(a_{k+1}) \underset{\text{ip de ind}}{=} A(a_1+\cdots+a_k)\cdot A(a_{k+1}) \underset{n=2}{=} A(a_1+\cdots+a_k+a_{k+1})$

$A(1)\cdots A(2020) = A(1+\cdots+\overset{n}{2020}) = A\left(\frac{2020\cdot 2021}{2}\right) = A(1010\cdot 2021)$

$1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\left.\begin{array}{l} A(1010\cdot 2021) = A(n) \\ \text{Obs } A(x) = A(y) \Leftrightarrow x = y \end{array}\right\} \Rightarrow n = 1010\cdot 2021 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2021 \mid n.$

$A(1)^{2020} = \underbrace{A(1)\cdots A(1)}_{2020} = A(2020) = \cdots$

(c') $A(1)\cdots A(n) = A(1+\cdots+n) =$

$= A\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = A(1035)$

$\frac{n(n+1)}{2} = 1035$

$n^2+n-2070 = 0 \quad \begin{array}{l} n_1 = 45 \\ n_2 = -46 \text{ x/a convine} \end{array}$

Soluția: $\boxed{n=45}$

2 MAI 2020

Exercițiu 3.6. (MI)

Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.

(b) Demonstrați că $A(a)\cdot A(b) = A(a+b)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Demonstrați că, dacă $A(n) = A(1)A(2)A(3)\cdots A(2020)$, atunci numărul natural n se divide cu 2021.

Alte cerințe

(a') Calculați $\det(A(a))$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

(b') Calculați $A(1)^{2020}$.

(c') Pentru ce valori naturale ale lui n avem $A(1)A(2)A(3)\cdots A(n) = A(1035)$?

b) $\det A(x) = x^2+9 > 0$, deci $\det A(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A(x)$ este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$A(x)^{-1} = \frac{1}{x^2+9}\begin{pmatrix} x & -3 \\ 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+9} & \frac{-3}{x^2+9} \\ \frac{3}{x^2+9} & \frac{x}{x^2+9} \end{pmatrix}$$

$$A(-1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$x = -1$

4 Matrice inversabile

Definiţie 4.1. *O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte inversabilă dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA = I_n$.*

Dacă A este inversabilă, matricea B din definiţie este unic determinată de A şi se notează A^{-1}.

Teorema 4.2. *O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.*

$n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ cu } \det A \neq 0,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exerciţiu 4.3. (SN) Se consideră matriceele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Arătaţi că $\det(A(x)) = x^2 + 9$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(b) Deduceţi că $A(x)$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(c) Determinaţi $A(-1)^{-1}$.

$\det A(a) = 1,\ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \det A(a) \neq 0,\ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(a) =$ inversabilă, $\forall a \in \mathbb{R}$

obs $\quad a = 0 \Rightarrow A(0) = I_3$

$A(a)^{-1} \qquad B \qquad A(a) \cdot B = B \cdot A(a) = I_3$

Caut $A(b)$: $A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a) = A(a+b) = A(0)$

$b = -a \qquad A(a) \cdot A(-a) = A(-a) A(a) = A(0) = I_3$

$$\Rightarrow (A(a))^{-1} = A(-a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ cu } \det A \neq 0,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -$$

Exercițiu 4.4. (MI) Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

(b) Demonstrați că $\boxed{A(a) \cdot A(b) = A(a+b)}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Determinați $A(a)^{-1}$ pentru $a \in \mathbb{R}$.

a) $\det A(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +i \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = i(-1+2) = i$

b) $\det A(a) = i + a^2 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ $\left(a^2 = -i \text{ nu are sol. reale} \right)$

$a \in \mathbb{R}$

$A(0)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3 \Rightarrow (A(0))^4 = I_3 \Rightarrow$

$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot + 2(-1)$

$A(0)^{2020} = [A(0)^2]^{1010} = (-I_3)^{1010} = I_3$

Exercițiu 4.5. (MI) Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$, unde $i^2 = -1$ și $a \in \mathbb{R}$.

(a) Arătați că $\det(A(0)) = i$.

(b) Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

(c) Calculați $\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdots A(0)}_{2020 \text{ de ori}}$.

(cerință suplimentară) Determinați $A(0)^{-1}$.

$\Rightarrow A(0) \cdot \underbrace{A(0)^3}_{A(0)^{-1}} = I_3$

$A(0)^{-1} = A(0)^3 = A(0)^2 \cdot A(0) =$

$= -I_3 \cdot A(0) = -A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$

-10

compatibil determinat

Regula lui Cramer

$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = -5 \neq 0 \Rightarrow (S)$ are sol unică și $\left(\frac{d_x}{d}, \frac{d_y}{d}, \frac{d_z}{d}\right)$

$d_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = -5$; $d_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = -10$

$x = \frac{-5}{-5} = 1$ $\qquad$ $y = \frac{-10}{-5} = 2$

$d_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = -15 \Rightarrow z = \frac{-15}{-5} = 3$

Verificați pe ciornă!

$\boxed{\text{Soluția unică: } (1, 2, 3)}$

Gauss

ec(1) cu -3 și o adăugăm la ec(2)
ec(1) cu -2 " " (3)

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -5y + 5z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$ $\quad x = 1$

$-5y + 15 = 5 \Rightarrow y = 2$

Regula lui Cramer: $Ax = b$; $A \in M_n(\mathbb{R})$ are soluție unică $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
În acest caz, $x_j = \frac{d_j}{d}$, ptr. $1 \le j \le n$.

5 Sisteme de ecuații liniare

Forma generală a unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute cu coeficienți în $\mathbb{R}$:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Forma matriceală a unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

unde

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ și } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R}).$$

Un n-uplu $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se numește *soluție* a sistemului S dacă verifică toate ecuațiile lui S. Un sistem de ecuații liniare se numește *compatibil* dacă are soluție. Dacă sistemul S are soluție unică, el se numește *compatibil determinat*. Dacă are mai multe soluții, sistemul se numește *compatibil nedeterminat*. Un sistem S care nu are soluții se numește *incompatibil*.

Teorema 5.1 (Regula lui Cramer). *Fie $d = \det A$ determinantul matricei sistemului $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și d_j determinantul care se obține din d prin înlocuirea coloanei j cu coloana $\mathbf{b}$. Atunci, sistemul $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ are soluția unică $(x_1, \ldots, x_n)$ cu $x_j = \frac{d_j}{d}$ pentru orice j* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Exercițiu 5.2. Să se rezolve sistemul[1]:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y - z = 3. \end{cases}$$

5
$= 3$
$\Rightarrow y = 2$
x

[1] Cramer și Gauss

(a) $\begin{cases} -(m^2-1)+4=1 \\ -1+0+1=0 \checkmark \\ -m+0+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2=-4\ ;\ m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2 \\ \underline{m=2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{m=2}$

(b) Sist are soluție unică $\Leftrightarrow$ det $A \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} m^2-1 & m & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix}}\neq 0 \qquad \begin{matrix} 2 \\ -7 \end{matrix}$$

$$= -m^2-5m+14 =$$

$$=($$

det $A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ și $m \neq -7$ $\underbrace{-m^2}\ (m+7) = (2-m)(m+7)$

$\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{2, -7\}$

(c) Regula lui Cramer

$$x_0 = \frac{d_x}{d},\ y_0 = \frac{d_y}{d},\ z_0 = \frac{d_z}{d}$$

$$x_0 = \frac{1}{m+7},\ y_0 = -\frac{m+3}{m+7},\ z_0 = \frac{m+2}{m+7} \in \mathbb{Z}$$

$\Uparrow$

$$\boxed{m+7=\pm 1}$$

$m+7=1 \Rightarrow m=-6$

$m+7=-1 \Rightarrow m=-8$

$$y_0 = -\frac{m+7-4}{m+7} = -1+\frac{4}{m+7}\ ;\ z_0 = \frac{m+7-5}{m+7} = 1-\frac{5}{m+7}$$

$y_0, z_0 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{m+7} \in \mathbb{Z},\ \frac{5}{m+7} \in \mathbb{Z}$

Exercițiu 5.3. (SN) Se consideră sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (m^2-1)x & +my & +4z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ mx & +3y & +z & = & -1, \end{cases}$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

(a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care tripletul $(-1, 0, 1)$ este soluție a sistemului de ecuații.

(b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

(c) Determinați numerele $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\}$ pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0, y_0, z_0) cu $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$.

(b) $\begin{vmatrix} m^2-1 & & \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix} = \dots = -m^2-5m+14$ $\quad -(2-m)(m+7)$

$$d_x = \begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 2-m;$$

$$d_y = \begin{vmatrix} m^2-1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = \dots m^2+m-6 = (m+3)(m-$$

$$d_z = \begin{vmatrix} m^2-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 3 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 4-m^2 = (2-m)(2+$$

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^e$$

$$\operatorname{rang} A^e = \operatorname{rang} A + 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} A^e$$

$$\neq 0$$

$$\det A(a) = -3a \Rightarrow -3a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ b \end{array}\right)$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ minorii caract $= 0$

$\operatorname{rang} A < 3.$

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & b \end{vmatrix} = -2(b-19) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 19}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A(0) = 2.$$

5.1 Sisteme de ecuaţii liniare compatibile

Teorema 5.5 (Kronecker-Capelli). *Sistemul de ecuaţii liniare* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *are soluţii (este compatibil) daacă şi nimai dacă*

$$\boxed{\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^e,}$$

unde $A^e = (A|\mathbf{b})$ *este matricea extinsă a sistemului.*

Teorema 5.6 (Rouché). *Sistemul de ecuaţii liniare* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *are soluţii (este compatibil) daacă şi nimai dacă toţi minorii caracteristici (dacă există!) sunt nuli.*

Întrebări 5.7. *Ce relaţie există, în general, între* $\operatorname{rang} A$ *şi* $\operatorname{rang} A^e$*? Considerăm un sistem de ecuaţii liniare omogen, adică de forma* $Ax = 0$ *(deci* $\mathbf{b} = 0$*). Ce relaţie există între* $\operatorname{rang} A$ *şi* $\operatorname{rang} A^e$*? Ce concluzie tragem despre compatibilitatea unui sistem omogen?*

Dar despre compatibilitatea unui sistem de forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *în cazul în care* $\operatorname{rang} A = m$ *(adică rangul lui* A *este gal cu numărul de ecuaţii)?*

Exerciţiu 5.8. (MI) Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x + ay + 2z = 4 \\ 3x + ay + 2z = 1 \\ 2x + ay + 5z = b, \end{cases}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Arătaţi că $\det(A(1)) = -3$. $\Rightarrow \det = 3$ sistem Cramer soluţie unic

(b) Pentru $a = -1, b = -2$ rezolvaţi sistemul de ecuaţii.

(c) Determinaţi numerele reale a şi b pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.