Polinoame şi ecuaţii algebrice

Viviana Ene [1]

https://math.univ-ovidius.ro/

11 aprilie 2020

[1] vivian@univ-ovidius.ro

Outline

- Ecuaţii (reductibile la ecuaţii) algebrice de grad 2
- Polinoame. Rădăcini. Teorema lui Bézout
- Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi.

Ex. 1 $\quad x^2-9x+14=0$; $\Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4\cdot1\cdot14=$

$a=1,\ b=-9,\ c=14$ $\quad =81-56=25>0$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-9)\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{9\pm5}{2}$ $\quad x_1=\dfrac{9-5}{2}=\dfrac{4}{2}=2$, $\quad x_2=\dfrac{9+5}{2}=\dfrac{14}{2}=7$ $\quad \neq\in\mathbb{R}$

$_4=2i$

Ex. 2 $\quad x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=2$

$a=1,\ b=-4,\ c=4 \Rightarrow \Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_1=x_2}=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-4)}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

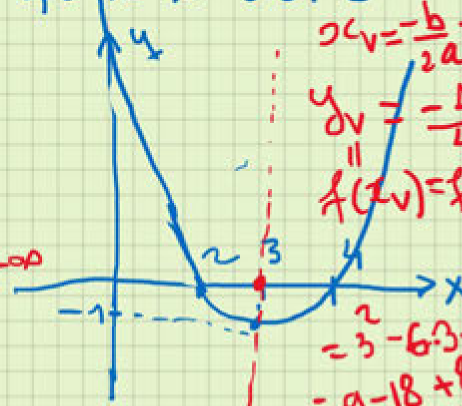
Ex. 3 $\quad x^2-2x+2=0 \quad a=1,\ b=-2,\ c=2$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=4-8=-4<0 \Rightarrow x_1,x_2\notin\mathbb{R}$

$x_{1,2}=\dfrac{2\pm2i}{2}=1\pm i$ $\quad z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$

$\boxed{a>0}$

$f(x)=x^2-6x+8$



$x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{6}{2}=3$

$y_v=\dfrac{-\Delta}{4a}=-1$

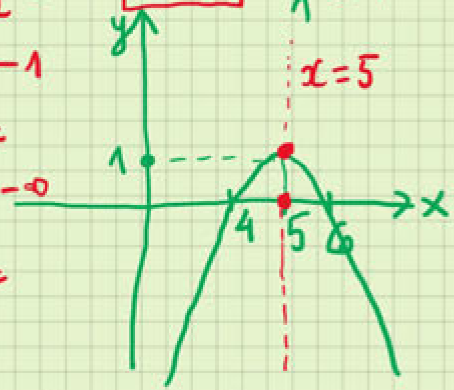
$f(x_v)=f(3)=$

$=3^2-6\cdot3+8=$

$=9-18+8$

$=-1$

$\boxed{a<0}$ $\quad f(x)=-x^2+10x-24$



$x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-10}{-2}=5$

$y_v=f(x_v)=$

$=-5^2+10\cdot5-24$

$=-25+50-24=1$

Ecuaţia de grad 2

- Forma generala: $\boxed{ax^2+bx+c=0, a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq0.}$
- $$\Delta=b^2-4ac$$
  $$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
-
  - $\Delta>0\Longrightarrow x_1\neq x_2\in\mathbb{R}.$
  - $\Delta=0\Longrightarrow x_1=x_2\in\mathbb{R}.$
  - $\Delta<0\Longrightarrow x_1,x_2\notin\mathbb{R}.$
- Relatii intre radacini si coeficienti: Viète
  $\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}.}$

Funcţia de gradul 2

- $\boxed{a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq0, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c.}$
- Graficul functiei este o parabola cu varful in punctul $V(x_v,y_v)$ unde
  $\boxed{x_v=-\frac{b}{2a}, y_v=-\frac{\Delta}{4a}.}$
-
  - $a>0\Longrightarrow$ Parabola cu varful in jos.(f este descrescatoare pe $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ si crescatoare pe $(-\frac{b}{2a},+\infty)$.) (Exemplu: $f(x)=x^2-6x+8$)
  - $a<0\Longrightarrow$ Parabola cu varful in sus. (f este crescatoare pe $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ si descrescatoare pe $(-\frac{b}{2a},+\infty)$.) (Exemplu: $f(x)=-x^2+10x-24$)

Semnul funcţiei de gradul 2

Semnul functiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ depinde de semnul lui a si de Δ.

Pentru $\Delta > 0, a > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	∞
ax^2+bx+c	$+$	0	$-$	0	$+$

Pentru $\Delta > 0, a < 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	∞
ax^2+bx+c	$-$	0	$+$	0	$-$

Funcţia şi ecuaţia de gradul 2
Ecuaţii reductibile la ecuaţii de gradul 2
Polinoame

Semnul funcţiei de gradul 2

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$

Pentru $\Delta = 0, a > 0$:

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	∞
ax^2+bx+c	$+$	0	$+$

Pentru $\Delta = 0, a < 0$:

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	∞
ax^2+bx+c	$-$	0	$-$

Viviana Ene | Polinoame şi ecuaţii algebrice

Funcţia şi ecuaţia de gradul 2
Ecuaţii reductibile la ecuaţii de gradul 2
Polinoame

Semnul funcţiei de gradul 2

$\Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Pentru $\Delta < 0, a > 0$:

x	$-\infty$			∞
ax^2+bx+c	$+$	$+$	$+$	$+$

Pentru $\Delta < 0, a < 0$:

x	$-\infty$			∞
ax^2+bx+c	$-$	$-$	$-$	$-$

Viviana Ene | Polinoame şi ecuaţii algebrice

Ex. 1 $\quad a>0 \quad f(x) = x^2 - 6x + 8$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
x^2-6x+8		$+++$	0	$--$	0	$+++$	

$$\begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in [2,4] \\ f(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty) \end{cases}$$

Ex. 2 $\quad a<0 \quad f(x) = -x^2 + 10x - 24$; $x_1 = 4$, $x_2 = 6$

x	$-\infty$		4		6		$+\infty$
$-x^2+10x-24$		$---$	0	$++$	0	$----$	

Ex. 3 $\quad a>0 \quad f(x) = x^2 - 2x + 2$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 =$
$= 4 - 8 = -4 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-2x+2		$+++++$	

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + 1 \geq 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ex. 4 $\quad a<0$

$f(x) = -x^2 + 6x - 9$

$x_1 = x_2 = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$---$	0	$---$	

$f(x) \leq 0, \forall x \in$

$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{$

$G_f \cap Ox$: $y = f(x) = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

R: Abscisele sunt $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$.

Punctele de intersecție cu axa Ox sunt $(2,0)$ și $(3,0)$

$G_f \cap Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 6$

$(0, f(0)) = (0,6)$

$x^2 - 5x + 6 < 0$

x		2		3	
x^2-5x+6	+ + +	0	− −	0	+ + + +

$x \in (2,3)$

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2,3]$

$\left.\begin{matrix} f(x) < 0 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right| \Rightarrow x \in (2,3) \cap \mathbb{Z} = \phi$!

Exerciţii

E1. (Teh) Se considera functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x + 6$. Determinati abscisele punctelor de intersectie a graficului functie f cu axa Ox.

- Care sunt ordonatele acestor puncte? 0
- Determinati coordonatele punctului de intersectie a graficului cu axa Oy.
- Rezolvati in $\mathbb{R}$ inecuatia $f(x) \leq 0$.
- Exista valori intregi ale lui x astfel incat $f(x) < 0$? NU
- Exista valori intregi ale lui x astfel incat $f(x) \leq 0$? DA

2, 3

$(x,y)\in G_f\cap G_g \Leftrightarrow f(x)=g(x)=y$

$x^2-3x+2=2x-4$

$x^2-3x+2-2x+4=0$

$x^2-5x+6=0 \;<\; \boxed{\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=3 \end{array}} \Rightarrow 2+3=5$

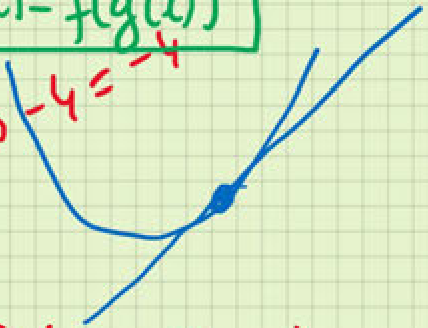
$\Rightarrow y_1=f(2)=g(2)=2\cdot 2-4=0$

$\Rightarrow y_2=f(2)=g(2)=2.$

R: Suma absciselor este 5

$\boxed{(f\circ g)(x)=f(g(x))}$

$g(0)=2\cdot 0-4=-4$



Exercitiu: Reprezentati grafic functiile f si g

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=$
$=f(-4)=(-4)^2-3\cdot(-4)+2=16+12+2=30!$

$f(2)\geq g(x)$

$x^2-3x+2\geq 2x-4$

$\Rightarrow x^2-5x+6\geq 0$

x			2		3		
x^2-5x+6	+	+	+ 0	− −	0	+	+ +

$x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

Funcția și ecuația de gradul 2
Ecuații reductibile la ecuații de gradul 2
Polinoame

Exerciții

E2. (SN) Se considera functiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4$. Calculati suma dintre abscisele punctelor de intersectie a graficelor celor doua functii.

- Care sunt ordonatele acestor puncte?
- Sa se rezolve in $\mathbb{R}$ inecuatia $f(x)\geq g(x)$.
- Sa se calculeze $(f\circ g)(0)$.

Viviana Ene — Polinoame și ecuații algebrice

$\Delta \geq 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 121 - 4m \geq 0$

$a = 1, b = -11, c = m$

$\Updownarrow$

$-4m \geq -121 \mid :(-4) < 0$

$m \leq \frac{121}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{121}{4}\right]$

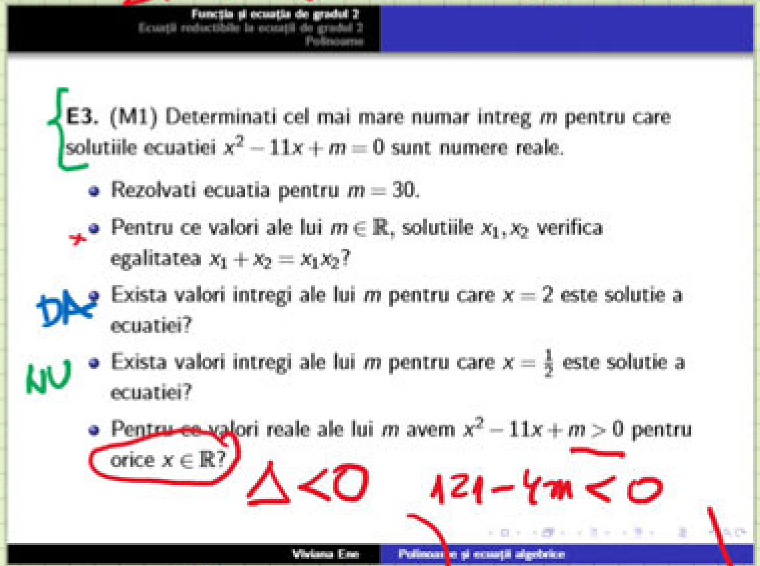
$121 : 4 = 30{,}25$

R: cel mai mare nr. întreg m pt. care soluțiile sunt reale este $\boxed{m=30}$.

$x = \frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ ireductibile

$\Rightarrow p \mid$ termenul liber al ec.

$q \mid$ coeficientul dominant



$\Delta < 0$ $\quad 121 - 4m < 0$

$m > \frac{121}{4}$

$m \in \left(\frac{121}{4}, \infty\right)$

$m = 30 \Rightarrow x^2 - 11x + 30 = 0 < {5 \atop 6}$

$x_1 + x_2 = 11$; $x_1 x_2 = 30$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-11)}{1} = 11$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} = m$

$x_1 + x_2 = x_1 x_2$

$\Rightarrow \boxed{m = 11}$

$x = 2$ este soluție $\Leftrightarrow$

$2^2 - 11 \cdot 2 + m = 0$

$4 - 22 + m = 0$

$-18 + m = 0$

$\boxed{m = 18 \in \mathbb{Z}}$

$m = \frac{23}{4} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{1}{2^2} - \frac{11}{2} + m = 0$

$1 = 22 - 4m \Rightarrow 2 \mid 1$.

$f(a)=f(a-2) \Leftrightarrow a^2+\cancel{6}=(a-2)^2+\cancel{6}$

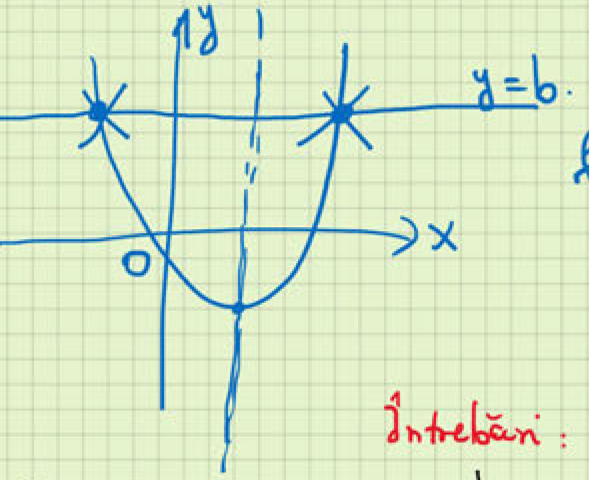
$\cancel{a^2}=\cancel{a^2}-4a+4$

$0=-4a+4 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$ ✓

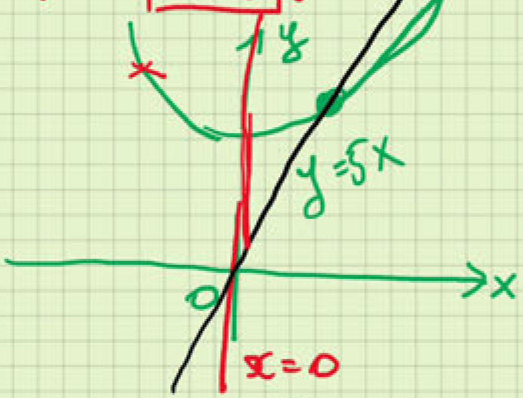
$a=-(a-2)$

$\Leftrightarrow a=-a+2 \Leftrightarrow 2a=2$

$\boxed{a=1}$



$f(x)=6\ ?$



Exercitii

E4. (M1) Se considera functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6$. Sa se determine $a\in\mathbb{R}$ stiind ca $f(a)=f(a-2)$.

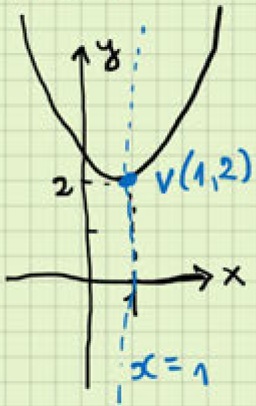
- Sa se determine abscisele punctelor de intersectie a graficului lui f cu dreapta de ecuatie $y=7$.
- Sa se determine coordonatele punctelor de intersectie a graficului lui f cu dreapta de ecuatie $y=7$.
- Sa se determine abscisele punctelor de intersectie a graficului lui f cu dreapta de ecuatie $y=5x$.

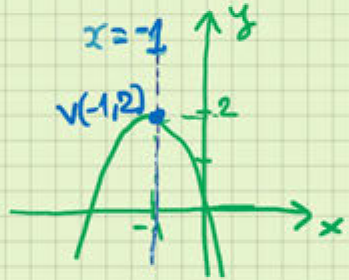
Întrebări:

$x^2+6=5x$

$x^2-5x+6=0$

$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=3 \end{cases}$





$f(x)=x^2+6 \qquad f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$ sau

$x_1=-x_2$

$G_f\cap\{y=7\}:\ f(x)=7 \Leftrightarrow x^2+6=7 \Leftrightarrow x^2=1$

$x=\pm1$ Abscisele: $x_1=1, x_2=-1$

$(1,7),(-1,7)$

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a} = 3 \quad \text{abcisa vârfului}} \quad \cancel{2p}$$

$a = 1$

$b = -m$

$c = 5$

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\frac{-m}{2} = \frac{m}{2} \\ x_v = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{2} = 3 \Leftrightarrow \boxed{m = 6}$$

R: abscisa vârfului = 3 ~~pentru~~ m=6.

$$\cancel{\left[\ \frac{m}{2} = 3 \Rightarrow m = 6\ \right]}$$ 3p! ~~pentru~~

$y_v = f(x_v)$ ....

$x_1^2 + x_2^2 = 15$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = m$

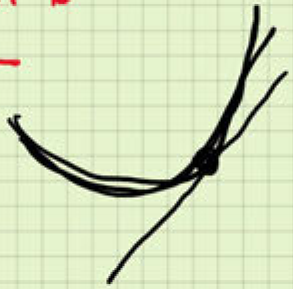
$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$

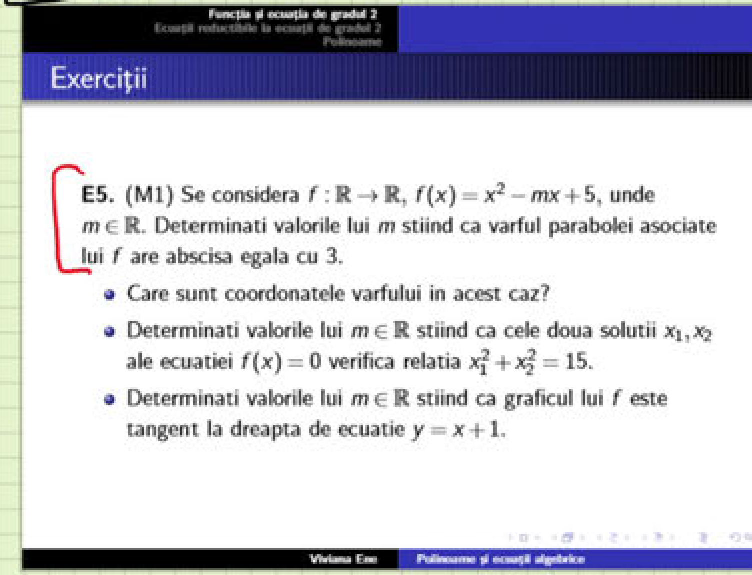
$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2\cdot 5 = m^2 - 10 \\ x_1^2 + x_2^2 = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow m^2 - 10 = 15 \Rightarrow m^2 = 25,\ m = \pm 5$$

$x^2 - mx + 5 = x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 4 = 0 \quad : x_1 = x_2$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 16$





Funcția și ecuația de gradul 2
Ecuații reductibile la ecuații de gradul 2
Polinoame

Exerciții

E5. (M1) Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 5$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinati valorile lui m stiind ca varful parabolei asociate lui f are abscisa egala cu 3.

- Care sunt coordonatele varfului in acest caz?
- Determinati valorile lui $m \in \mathbb{R}$ stiind ca cele doua solutii x_1, x_2 ale ecuatiei $f(x) = 0$ verifica relatia $x_1^2 + x_2^2 = 15$.
- Determinati valorile lui $m \in \mathbb{R}$ stiind ca graficul lui f este tangent la dreapta de ecuatie $y = x + 1$.

Viviana Ene — Polinoame și ecuații algebrice

$$m + 1 = \pm 4 \left\langle \begin{array}{l} m = 3 \\ m = -5 \end{array}\right.$$

$\sqrt{x^2+2}=3\sqrt{3}\,\Big|^2$ C.E. $x^2+2\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$

$x^2+2=9\cdot 3$

$x^2+2=27$

$x^2=25$

$x=\pm 5\in\mathbb{R}$

Soluțiile ec: $x=5$, $x=-5$

$\sqrt{x^2+2}=3\sqrt{3}\,\Big|^2$

$\vdots$

$x=\pm 5$

Verificare:

$x=-5\Rightarrow\sqrt{(-5)^2+2}=3\sqrt{3}$

$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ A

$x=5\Rightarrow\sqrt{5^2+2}=3\sqrt{3}$ A

$\begin{cases}x\geq 0\\ 3-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[0,3]$

$4x=9-6x+x^2$

$x^2-10x+9=0$ $\begin{cases}\boxed{x_1=1\in[0,3]}\\ x_2=9\notin[0,3] \text{ nu convine}\end{cases}$

E3 $\begin{cases}14-x\geq 0\\ 3x+6\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-2,14]$

$14-x=3x+6$

$4x=8$

$x=2\in[-2,14]$ //

Verificare pt $x=2$

$a=b\Rightarrow a^2=b^2$

$\not\Leftarrow$

$3x+1=(3x+1)^2$

$(3x+1)-(3x+1)^2=0$

$(3x+1)(1-3x-1)=0$

$-3x(3x+1)=0$ $\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-\frac{1}{3}\end{cases}$

$0,-\frac{1}{3}\in\left[-\frac{1}{3},\infty\right)\Rightarrow$ sol ec $0,-\frac{1}{3}$

Funcţia şi ecuaţia de gradul 2
Ecuaţii reductibile la ecuaţia de gradul 2
Polinoame

Ecuații iraționale

$\sqrt{f(x)}=g(x)$. C. E. $f(x)\geq 0$ si $g(x)\geq 0$.

E1. (Teh) Rezolvati in numere reale ecuatia $\sqrt{x^2+2}=3\sqrt{3}$.

E2. (Teh) Rezolvati in numere reale ecuatia $\sqrt{3x+1}=3x+1$.

E3. (Teh) Rezolvati in numere reale ecuatia $\sqrt{14-x}=\sqrt{3x+6}$.

E4. (SN) Rezolvati in numere reale ecuatia $2\sqrt{x}=3-x$.

E5. (SN) Rezolvati in numere reale ecuatia $\sqrt{x^2-5x+7}=x-1$.

$2\cdot\sqrt{9}=3-9$

$6=-6$ fals

C.E $x\in[1,\infty)$

$x\in\mathbb{R}$ ≥ 0

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$
$$a > 0,\ a \neq 1$$

$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ $\quad y + \frac{1}{y} = 2;\ y = 1 \Rightarrow x = 7 \in (0,\infty)\setminus\{1\}$

$\log_x 7 = \frac{1}{\log_7 x} \ \Big|\ 1 + \overset{y}{\log_7 x} + \frac{1}{\log_7 x} = 3$

E6. $x^2 - 3x = x - 4$ ..... $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

E5. $x^2 + 3 = 4x$ ..... $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\log_a f(x)$ $\quad \boxed{f(x) > 0}$

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

în CE: $f(x), g(x) > 0$. $\quad x \in \mathbb{R}$

E1 $\begin{cases} x^2 + 4x + 5 > 0 & \Delta = 16 - 20 = -4 < 0. \\ 2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \Rightarrow \boxed{x \in (-2, \infty)} \end{cases}$

$x^2 + 4x + 5 = 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0,\ (x+1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1} \in (-2, \infty)$ ✓

Ecuații logaritmice și exponențiale

$\log_a x$ este definit pentru $a > 0, a \neq 1$ si $x > 0$

$x > 0,\ x \neq 1$

E1. (M1) Rezolvati in numere reale ecuatia $\log_4(x^2 + 4x + 5) = \log_4(2x + 4)$.

E2. (M1) Rezolvati in numere reale ecuatia $\log_5(\sqrt{x} + 1) + \log_5(\sqrt{x} - 1) = 2$.

E3. (M1) Rezolvati in numere reale ecuatia $\log_7(7x) + \log_x 7 = 3$.

E4. (Ped) Rezolvati in numere reale ecuatia $2\lg x = \lg(2x + 8)$.

E5. (Ped) Rezolvati in numere reale ecuatia $2^{x^2+3} = 2^{4x}$.

E6. (SN) Rezolvati in numere reale ecuatia $3^{x^2-3x} = 3^{x-4}$.