

## Book of abstracts

Sesiunea de Comunicări Matematice  
Constanta

5 Decembrie 2020

# Contribuții în cadrul teoriei hipergrupurilor

**Andromeda SONEA**

Școala doctorală a Facultății de Matematică,

Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iași

soneaandromeda@yahoo.com

## Abstract

Teoria hipergrupurilor a fost introdusă de către F. Marty în anul 1934 în cadrul unui Congres. Fie  $H$  o mulțime nevidă, iar hiperoperația “ $\circ$ ” este definită pe produsul cartezian  $H \times H$  cu proprietatea ca  $a \circ b$  este egală cu o submulțime al mulțimii  $H$ , ceea ce generalizează legea de compozitie pe care o regăsim în cadrul teoriei grupurilor. Prin urmare, teoria hiperstructurilor reprezintă o extindere a teoriei grupurilor. Prezentarea noastră pune accentul pe trei clase importante de hiperstructuri, mai exact teoria hipergrupurilor complete, teoria poligrupurilor, respectiv teoria hipergrupurilor canonice. În cadrul teoriilor menționate, am studiat gradul de comutativitate al unui hipergrup complet, respectiv al unui poligrup. Am determinat ecuația claselor și legătura acesteia cu gradul de comutativitate. De asemenea, am acordat o atenție deosebită asupra funcției lui Euler în contextele prezentate. Scopul fiind acela de a determina asemanări, dar și diferențe cu rezultatele cunoscute din teoria clasică.

## Bibliografie

- [1] Ana Castelaz, *A Thesis Submitted to the Graduate Faculty of Wake Forest University, in Partial Fulfillment of the Requirements for the degree of Masters of Arts in the Department of Mathematics*, North Carolina, May 2010.
- [2] Piergiulio Corsini, Violeta Leoreanu, *Applications of hyperstructures theory*, Kluwer Academic Publishers Boston/Dordrecht/ London.
- [3] Piergiulio Corsini, Introducere în teoria hipergrupurilor, Ed. Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iași, 1998.
- [4] Irina Cristea, *Complete hypergroups, 1-hypergroups and fuzzy sets*, An. St. Univ. Ovidius Constanța, 10(2), 25-38, 2002
- [5] Irina Cristea, *Contributions to the study of the connections between algebraic hyperstructures and fuzzy sets*, PhD Thesis, "Ovidius" University Constanța, Faculty of Mathematics and Informatics, 2007.
- [6] Bijan Davvav, *Polygroup Theory and Related Systems*, World Scientific Publishing.
- [7] Andromeda Sonea, *HX-groups associated with dihedral group  $D_n$* , Journal of Multiple Valued Soft and Logic Computing, 2019.
- [8] Andromeda Sonea, *New aspects in polygroup theory*, An. St. Univ. Ovidius, Constanța, 2020.
- [9] Marius Tărnăuceanu, *A generalization of the Euler's totient function*, Asian European Journal of Mathematics, 2013.

# Construcția algebrelor Wajsberg

Radu VASILE

Școala doctorală de Matematică, Universitatea Ovidius din Constanța

rvasile@gmail.com

## Abstract

Algebrele BCK au fost introduse de Imai și Iseki în 1996 în [2] ca o generalizare pentru operația de diferență a două multimi. Recent, au fost gasite aplicații noi pentru aceste algebrelor, cum ar fi cele din [3] și [1]. În aceste articole, un cod binar este asociat cu o algebra BCK și se arată că se poate face și drumul invers, obținerea unui BCK dintr-un cod bloc binar. Aceste noi aplicații deschid un domeniu interesant de cercetare, deoarece o mulțime de întrebări raman încă fără răspuns sau au răspunsuri parțiale. Având în vedere aceste lucruri, a devenit interesant să studiem în detaliu modul în care pot fi construite algebrele BCK și care este structura acestei clase de algebrelor.

În [10], autorul prezintă două noi extensiuni pentru algebrele BCK și arată, de asemenea, că structura clasei de algebrelor BCK are forma unui graf format din trei arbori care se intersecțează, numiți arbori BCK. Autorul arată, de asemenea, că algebrele BCK sunt împărțite în acești arbori după proprietățile lor, ceea ce înseamnă că avem arboarele algebrelor BCK comutative, arboarele algebrelor BCK implicative pozitive și arboarele algebrelor BCK implicative. Mai mult, se arată că atunci când doi arbori se intersecțează, algebra BCK care constituie intersecția pierde proprietăți, asemănător cu procesul Cayley-Dickson în cazul algebrelor definite peste un corp.

Pornind de la algebrelor BCK, au fost construite diverse generalizări, cum ar fi: algebrelor BCK generalizate [7], algebrelor dual BCK [5], BE Algebrelor [4]. Aceste algebrelor sunt o clasa importantă de algebrelor logice cu aplicații în multe domenii ale matematicii, cum ar fi: teoria grupurilor, teoria multimilor fuzzy, analiza funcțională, teoria probabilității etc. Unele clase de algebrelor logice sunt subclasele proprii ale altor clase, astfel cum avem și în cazul algebrelor BCK care sunt o subclasa proprie a algebrelor BCI, iar între alte clase de algebrelor logice s-au stabilit relații de echivalență.

Pornind de la echivalența dintre algebrele Hilbert și algebrele BCK, în ([6], pp. 249 - 256), autorul construiește coduri de corectare a erorilor atașate algebrelor Hilbert.

Construcția data, precum și echivalențele existente între diferențele clase de algebrelor logice, stănesc un interes deosebit în a studia în detaliu alte clase de algebrelor, precum și conexiunile dintre ele.

În aceasta prezentare, începând de la încercarea de a atașa coduri corectare de erori algebrelor MV, având ca exemplu ([6], pp. 249 - 256), precum și echivalența algebrelor MV cu algebrele BCK comutative și marginite și algebrele Wajsberg, am construit cîteva rezultate interesante pe algebrele Wajsberg. În primul rînd, am calculat numărul algebrelor Wajsberg de un anumit ordin [8]. Apoi, oferim o teoremă de reprezentare a algebrelor Wajsberg, ca în final să dam un algoritm de construcție al algebrelor Wajsberg ([9]).

Prezentarea se incheie prin constructia algebrelor Wajsberg de ordin 4, ca exemplificare a algoritmului dat ([9]).

### Acknowledgements

Aceasta lucrare a fost realizata in cadrul proiectului *Excelenta academica si valori antreprenoriale - sistem de burse pentru asigurarea oportunitatilor de formare si dezvoltare a competentelor antreprenoriale ale doctoranzilor si postdoctoranzilor* (ANTREPRENORDOC), cofinanatat din Fondul Social European prin Programul Operational Capital Uman, 2014-2020, Contract nr. 36355/23.05.2019 POCU/380/6/13 - Cod SMIS: 123847.

This work is supported by the project ANTREPRENORDOC, in the framework of Human Resources Development Operational Programme 2014-2020, financed from the European Social Fund under the contract number 36355/23.05.2019 HRD OP /380/6/13-SMIS Code: 123847.

### Bibliografie

- [1] C. Flaut, *BCK-algebras arising from block-codes*, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, (28):1829-1833, 2015.
- [2] Yasuyuki Imai and Kiyoshi Iseki, *On axiom systems of propositional calculi*, xiv. Proceedings of The Japan Academy, 42(01)(1966).
- [3] Y. B. Jun and S. Z. Song, *Codes based on BCK-algebras*, Inform. Sciences., (181):5102-5109, 2011.
- [4] Hee Sik Kim and Young Hee Kim, *On BE-algebras*, Scientiae Mathematicae Japonicae, 66(01)(2007).
- [5] Kyung Kim and Yong Ho Yon, *Dual BCK-algebra and MV-algebra*, Scientiae Mathematicae Japonicae, 66(01)(2007).
- [6] Antonio Maturo, Sarka Hoskova-Mayerova, Daniela-Tatiana Soitu, and Janusz Kacprzyk, editors, *Recent Trends in Social Systems: Quantitative Theories and Quantitative Models*, volume 66 of Studies in Systems, Decision and Control, chapter: C. Flaut, *Some Connections Between Binary Block Codes and Hilbert Algebras*, pages 249-256. Springer International Publishing Switzerland, 2017.
- [7] Sung Min Hong, Young Bae Jun, and Mehmet Ozturk, *Generalizations of BCK-algebras*, Scientiae Mathematicae Japonicae, 58(01)2004.
- [8] Cristina Flaut and Radu Vasile, *Wajsberg algebras arising from binary block-codes*, Soft computing, 24(2020), 6047-6058, DOI: 10.1007/s00500-019-04653-5.
- [9] Cristina Flaut, Sarka Hoskova-Mayerova, Arsham Borumand Saeid and Radu Vasile. *Wajsberg algebras of order n*,  $n \leq 9$ , Neural Computing and Applications, 32(2020), 13301-13312, DOI: 10.1007/s00521-019-04676-x.
- [10] Radu Vasile, *New ways for building BCK-algebras of higher order*, Tbilisi Mathematical Journal, Special Issue IECMSA-2019:111-124, (05)2020.

# Generalizări ale inegalităților de tip Ostrowski pentru diferite tipuri de convexitate

Bianca Ioana VASIAN, Ștefan Lucian GAROIU

Scoala doctorală de Matematică, Universitatea Transilvania din Brașov

bianca.vasian21@gmail.com; stefangaroiu@gmail.com

## Abstract

In aceasta lucrare sunt stabilite cateva inegalitati de tip Ostrowski obtinute cu ajutorul unor clase de functii convexe. Vor fi folosite urmatoarele tipuri de convexitate: convexitatea  $(\alpha; m; h)$  definita de M.A. Noor, M.U. Awan, K.I. Noor si T.M. Rassias in lucrarea "On  $(\alpha; m; h)$ - Convexity", precum si convexitatea logaritmica si Aritmetic-Armonica(AH).

## Bibliografie

- [1] M. Alomari, M. Darus, S. S. Dragomir and P. Cerone, *Ostrowski's inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense*, RGMIA Res. Rep. Coll., 12(2009), Supplement, Article 15.[ONLINE: [http://www.sta\\_.vu.edu.au/RGMIA/v12\(E\).asp](http://www.sta_.vu.edu.au/RGMIA/v12(E).asp)]
- [2] M.E Ozdemir, H. Kavurmacı, E. Set, *Ostrowski's Type Inequalities for  $(\alpha; m)$ - Convex Functions*, KYUNGPOOK Math. J.. 50(2010), 371-378.
- [3] Dragomir, SS, Agarwal, RP, Cerone, P, *On Simpson's inequality and applications*, J. Inequal. Appl., 5(2000), 533-579.
- [4] M.A, Noor, M.U. Awan, K.I. Noor, T.M. Rassias, *On  $(\alpha; m; h)$ -Convexity*, Applied Mathematics &Information Sciences, 2018.
- [5] E. K. Godunova, V. I. Levin, Mat. i. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva., 138-142, 1985, (in Russian).
- [6] V.G.Mihesan, *A generalization of the convexity*, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania, 1993.
- [7] G. Toader, S. Toader, *Approximation and Convexity*, 7(2009), 147-154.

**Echivalentul Lepage fundamental**  
**Bianca Ioana VASIAN, Stefan Lucian GAROIU**  
Școala doctorală de Matematică, Universitatea Transilvania din Brașov  
bianca.vasian21@gmail.com; stefangaroiu@gmail.com

**Abstract**

In aceasta lucrare vom prezenta o metoda de generalizare a echivalentului Lepage fundamental (forma Krupka-Bethunes) asociat unui lagrangian de ordinul intai la lagrangieni de ordinul doi. Ideea principala consta in a gasi o aplicatie ce asociaza unui lagrangian de ordin cel mult 2 un echivalent Lepage definit local ce are proprietatea inchiderii. Rezultatul principal al acestui articol reprezinta un raspuns la o problema deschisa si anume, determinarea echivalentului Lepage fundamental asociat lagrangienilor de ordin arbitrar. De asemenea, tot ca un rezultat original, vom demonstra ca echivalentul Lepage principal asociat lagrangienilor triviali de ordin arbitrar din mecanica si lagrangienilor de ordinul intai din teoria campurilor fizice este o forma diferentiala inchisa.

Motivatie: Formele Lepage ofera o descriere globala, eleganta a calculului variational, conducand astfel la expresii in coordonate mult mai simplificate. De asemenea, o abordare globala ofera o inteleghere mult mai profunda a problemelor variationale.

**Bibliografie**

- [1] M. Crampin, D. J. Saunders, *The fundamental form of a homogeneous Lagrangian in two independent variables*, Journal of Geometry and Physics, 60(11)(2010), 1681-1697.
- [2] D. Krupka, *Introduction to Global Variational Geometry*, Atlantis Press, 2015
- [3] D. Krupka, *A map associated to the Lepagian forms on the calculus of variations in fibred manifolds*, Czechoslovak Mathematical Journal, 27(1) (1977), 114-118

# Identitatea Hall Delia MUSTĂCA

Școala doctorală de Matematică, Universitatea Ovidius din Constanța  
mustaca.delia@gmail.com

## Abstract

In cele ce urmeaza, vom prezenta identitatea lui Hall pe algebrelor de cuaternioni si octonioni cu diviziune. Deoarece algebrelor de cuaternioni si de octonioni sunt sarace in proprietati, cuaternionii pierzând comutativitatea si octonionii pierzând comutativitatea si asociativitatea, studiul unor identitati pe aceste algebrelor este interesant si foarte important. Prin urmare, orice relatie suplimentara, identitate sau proprietate poate fi foarte utila in studiul acestor algebrelor. Una dintre aceste identitati este identitatea lui Hall, valabila pentru cuaternioni si octonioni dar si pentru orice algebra obtinuta prin procedeul Cayley-Dickson. Este cunoscut faptul ca aceste algebrelor, incepand cu dimensiunea 16, sunt si mai sarace in proprietati, nefiind comutative, asociative si alternative dar ramanand asociative in puteri si flexible.

Hall a demonstrat că identitatea  $(xy-yx)^2z = z(xy-yx)^2$  este valabila pentru toate elementele  $x, y, z$  dintr-o algebră de cuaternioni cu diviziune. Aceasta identitate se numeste identitatea lui Hall. Mai mult, Hall a dovedit si afirmația reciproca: daca identitatea de mai sus este adevarată într-o algebra asociativa, finit dimensională si cu diviziune, atunci aceasta algebra este o algebra de cuaternioni. Mai tarziu, Smiley a demonstrat că identitatea lui Hall este adevarată si pentru algebra octonionilor cu diviziune. In plus, a aratat ca, in acest caz, si reciproca este adevarata: daca identitatea lui Hall este adevarată într-o algebră alternativă cu diviziune, atunci aceasta este o algebră de cuaternioni cu diviziune sau algebra de octonioni cu diviziune.

## Bibliografie

- [1] Albert, A. A., *Absolute-valued algebraic algebras*, Bull. Amer. Math. Soc., 55(1949), 763-768.
- [2] Baez, J.C., *The Octonions*, B. Am. Math. Soc., 39(2)(2001), 145-205,<http://www.ams.org/journals/bull/2002-39-02/S0273-0979-01-00934-X/S0273-0979-01-00934-X.pdf>.
- [3] Bremner, M.R., Murakami, L.I., Shestakov, I.P., *Nonassociative Algebras*, <https://www.math.uci.edu/brusso/BremnerEtAl35pp.pdf>
- [4] Elduque, A., Perez, J. M., *Composition algebras with associative bilinear form*, Comm. Algebra 24(3) 1091-1116,1996.
- [5] Flaut, C., Shpakivskyi,V., *Some identities in algebras obtained by the Cayley-Dickson process*, Adv. Appl. Clifford Algebras, 23(1)(2013), 63-76, DOI: 10.1007/s00006-012-0344-6.
- [6] Hall, M., *Projective planes*, Trans. Amer. Math. Soc. vol.54(1943), 229-277.
- [7] McCrimmon, K., *Pre-book on Alternative Algebras*, 1980,

- <http://mysite.science.uottawa.ca/neher/Papers/alternative/>  
<http://mysite.science.uottawa.ca/neher/Papers/alternative/2.2.Composition%20algebras.pdf>.
- [8] Schafer, R. D., *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New-York, 1966.
- [9] Smiley, M. F., *A remark on a theorem of Marshall Hall*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1(1950), 342-343.
- [10] Zorn, M., *Alternative rings and related questions I: Existence of the radical*, Ann. of Math. 2(42) (1941), 676-686

# Maparea imaginilor la text folosind arhitecturi de învățare profundă

Daniela Marcela NAGY-ONITA

Universitatea "1 Decembrie 1918" din Alba Iulia

danielaconita25@gmail.com

Școala doctorală, Universitatea din București

## Abstract

Imaginile și textul reprezintă tipuri de continut care sunt utilizate împreună pentru transmiterea unui mesaj. Procesul de mapare a imaginilor la text poate oferi informații foarte utile și poate fi inclus în multe aplicații din domeniul medical, aplicații pentru nevazatori, retele sociale, etc. În această lucrare, se investighează o abordare pentru maparea imaginilor la text folosind un model Kernel Ridge Regression. Au fost luate în considerare două tipuri de caracteristici ale imaginilor: caracteristici simple pe baza valorii pixelilor RGB și caracteristici extrase cu abordări de învățare profundă. Au fost investigate mai multe arhitecturi ale retelelor neuronale pentru extragerea caracteristicilor de imagine: VGG16, Inception V3, ResNet50, Xception. Evaluarea experimentală a fost efectuată pe trei seturi de date din domenii diferite. Textele asociate cu imaginile reprezintă descrieri obiective pentru două dintre cele trei seturi de date și descrieri subiective pentru celălalt set de date. Rezultatele experimentale arată că abordările mai complexe de învățare profundă care au fost utilizate pentru extragerea caracteristicilor imaginilor au performante mai bune decât abordările simple cu valoarea pixelilor RGB. Mai mult, arhitectura de retea ResNet50 funcționează cel mai bine în comparație cu celelalte trei arhitecturi de retea profunde luate în considerare pentru extragerea caracteristicilor imaginilor. Eroarea modelului obținută utilizând reteaua ResNet50 este mai mică cu cca. 0,30 decât eroarea modelelor în care s-au utilizat alte arhitecturi de retea neuronale. În plus, s-a urmărit există o diferență de performanță între tipul de text asociat cu imaginile: subiectiv sau obiectiv. Pentru comparația vizuală, au fost extrasi descriptori de limbaj natural pentru imagini folosind modelul propus. Descrierile generate au fost comparate cu cuvintele descriptive originale ale imaginilor. Modelul propus a generat mai multe descrieri similare cu originalul pentru setul de date care conține descrieri obiective al căror vocabular este mai simplu, mai mare și mai clar.

## Bibliografie

[1] Onita, D., Dinu, L.P., Birlutiu, A., *From Image to Text in Sentiment Analysis via Regression and Deep Learning*, In Proceedings of the International Conference on Recent Advances in Natural Language Processing (RANLP 2019), Varna, Bulgaria, 2–4 September 2019, 862–868.

[2] Fidler, S. *Teaching Machines to Describe Images with Natural Language Feedback*, Proceedings of the Neural Information Processing Systems, Long Beach, CA, USA, 4–9 December 2017, 5068–5078.

3. Von Ahn, L., Dabbish, L., *Labeling images with a computer game*, Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems, Vienna, Austria, 24–29 April 2004, 319–326.
4. Bai, S., An, S., *A survey on automatic image caption generation*, Neurocomputing, 311(2018), 291–304.

# Relații de recurență. Aplicații în criptografie

## Mariana-Geanina ZAHARIA

Școala doctorală de Matematică, Universitatea Ovidius din Constanța  
geaninazaharia@yahoo.com

### Abstract

Relațiile de recurență au aplicații în mai multe domenii. Unul dintre aceste domenii este Criptografia, unde relațiile de recurență pot fi folosite pentru a găsi chei de criptare și de decriptare.

### Acknowledgements

Aceasta lucrare a fost realizată în cadrul proiectului *Excelenta academica si valori antreprenoriale - sistem de burse pentru asigurarea oportunitat ilor de formare si dezvoltare a competențelor antreprenoriale ale doctoranzilor si postdoctoranzilor* (ANTREPRENORDOC), cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operational Capital Uman, 2014-2020, Contract nr. 36355/23.05.2019 POCU/380/6/13 - Cod SMIS: 123847.

This work is supported by the project ANTREPRENORDOC, in the framework of Human Resources Development Operational Programme 2014-2020, financed from the European Social Fund under the contract number 36355/23.05.2019 HRD OP /380/6/13-SMIS Code: 123847.

### Bibliografie

- [1] T.V. Didkivska, M.V.St'epochkina, *Properties of Fibonacci-Narayana numbers*, In the World of Mathematics, 9(1)(2003),29-36. [in Ukrainian]
- [2] European Payments Council, *Guidelines on Cryptographic Algorithms Usage and Key Management*, 2018.
- [3] C. Flaut, *Some application of difference equations in Cryptography and Coding Theory*, Journal of Difference Equations and Applications, 25(7)(2019), 905-920.
- [4] C. Flaut, D. Savin, G. Zaharia, *Some applications of Fibonacci and Lucas numbers*, accepted in C. Flaut, S. Hoskova-Mayerova, F.Maturo, *Algorithms as an approach of applied mathematics*, Springer, 2021.
- [5] C. Flaut, D. Savin, G. Zaharia, *Properties and applications of some special integer number sequences*, accepted in Mathematical Methods in the Applied Sciences, DOI: 10.1002/mma.6257.
- [6] Han, J.S., Kim, H.S., Neggers, J., *Fibonacci sequences in groupoids*, Advances in Difference Equations 2012, 2012:19
- [7] Johnson RC, *Fibonacci numbers and matrices*, Available at <http://maths.dur.ac.uk/dma0rcj/PED/fib.pdf>.
- [8] N. Koblitz, *A Course in Number Theory and Cryptography*, Springer Verlag, New-York, 1994, p. 65-76.
- [9] M. E. Koroglu, I. Ozbek, I. Siap, *Optimal Codes from Fibonacci Polynomials and Secret Sharing Schemes*, Arab. J. Math, 2017, 1-12.

- [10] R. Melham, *Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers*, Portugalie Mathematica, 56(3)(1999), 309-317.
- [11] M. Renault, *The Period, Rank, and Order of the  $(a,b)$ -Fibonacci Sequence Mod  $m$* , Mathematics Magazine, 86(5)(2013), 372-380, doi.org/10.4169/math.mag.86.5.372.
- [12] Stakhov, A.P., *Fibonacci matrices, a generalization of the Cassini formula, and a new coding theory*, Chaos, Solitons and Fractals, 30(2006), 56-66.
- [13] Stakhov, A.P., *The golden matrices and a new kind of cryptography*, Chaos, Solitons and Fractals, 32(2007), 1138-1146.
- [14] D. D. Wall, *Fibonacci Series Modulo  $m$* , The American Mathematical Monthly, 67(6)(1960), 525-532.
- [15] <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
- [16] <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/lucasNbs.html>
- [17] <http://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html> medskip

# Rafinări ale inegalității Cauchy-Buniakowsky-Schwarz

Cristina PĂCURAR

Școala doctorală de Matematică, Universitatea Transilvania din Brașov

cristina.pacurar@unitbv.ro

## Abstract

Lucrarea de fata contine generalizari ale inegalitatii Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. In plus, lucrarea prezinta cateva imbunatatiri ale inegalitatii Bergström care rezulta din noile rezultate obtinute. De asemenea, aducem cateva imbunatatiri ale inegalitatii Bergström bazandu-ne pe inegalitatea lui Milne si inegalitatea lui Callebaut. Cu ajutorul noilor rezultate obtinute prezentam cateva rezultate particolare si unele imbunatatiri ale inegalitatii lui Nesbitt.

## Bibliografie

- [1] De Bruijn, N. G., *Problem 12*, Wisk, Opgaven 21 (1960), 12-14.
- [2] Daykin, D. E., Eliezer, C.J., Carlitz, C., *Problem 5563*, Amer. Math. Monthly, 75(1968), 198 and 76(1969), 98-100.
- [3] Dragomir, S.S., *Refinements of the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Inequality for Functions of Selfadjoint Operators in Hilbert Spaces*, Linear and Multilinear Algebra 59(7)(2011), 711-717.
- [4] Dragomir, S.S., *A survey on Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz type discrete inequalities*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics 4(3)(2003), Article 63.
- [5] Dragomir, S.S., *Reverses of the Schwarz inequality in inner product spaces and applications*, Mathematische Nachrichten, 288(7)(2015), 730-742.
- [6] Dunkl, C.F. and Williams, K.S., *A simple inequality*, Amer. Math.Monthly, 71 (1964), 53-54.
- [7] Mitrinovici, D. S., *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [8] Mitrinovic, D.S. Pecaric, J.E. and Fink, A.M., *Classical and new inequalities in analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [9] Wigren, T., *The Cauchy-Schwarz inequality. Proofs and applications in various spaces*, Karlstad University, 2015.

# Aplicații ale Lemei Schwarz

Bianca Ioana VASIAN

Școala doctorală de Matematică, Universitatea Transilvania din Brașov  
bianca.vasian21@gmail.com

## Abstract

În această secțiune se consideră clasa funcțiilor olomorfe în discul unitate de forma  $f(z) = z + c_{p+1}z^{p+1} + c_{p+2}z^{p+2} + \dots$ ,  $p \geq 1$ , ce satisfac  $\left| \frac{f'(z)}{\lambda f'(z) + (1-\lambda)} - \alpha \right| < \beta$  pentru  $|z| < 1$  și  $\alpha, \lambda \in [0, 1]$ ,  $\beta \in (0, 1]$ . Pentru această clasa sunt studiate inegalități pentru derivata funcției și cea de-a doua derivată a acesteia în puncte de pe frontierăa discului unitate cu ajutorul Lemei Schwarz și a versiunii acesteia pe frontieră. Se vor obține inegalități pentru derivata a doua a funcției  $f$  în puncte de pe frontieră luând în considerare zerourile funcției  $f(z) - z$  precum și coeficienții  $c_{p+1}$  și  $c_{p+2}$ .

## Bibliografie

- [1] H.P. Boas, *Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma*, Amer. Math. Monthly, 117(9)(2010), 770-775.
- [2] M. Jeong, *The Schwarz Lemma and its Application at a Boundary Point*, J.Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math, 21(3)(2014), 219-227.
- [3] B. Örnek, *Scharpened forms of the Schwarz lemma on the boundary*, Bull. Korean Math. Soc, 50(6)(2013), 2053-2059.
- [4] B. Örnek, *Inequalities for the angular derivatives of certain classes of holomorphic functions in the unit disc*, Bull. Korean Math. Soc. 53(2)(2016), 325-334.
- [5] R. Osserman, *A Sharp Schwarz Inequality on the boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. 128(12)(2000), 3513–3517.
- [6] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [7] H. Unkelbach, *Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung*, Math. Z. 43(1)(1938), 739-742.

# Forme biliniare și pătratice. Conexiuni cu algebrele de cuaternioni

Ana NECHIFOR

Scoala doctorală de Matematică, Universitatea Ovidius din Constanța  
nechifor.ana96@gmail.com

## Abstract

Studiul algebrelor de cuaternioni este strâns legat de teoria algebraică a formelor patratice. Studiul nivelului și subnivelului algebrelor de cuaternioni este strâns legat de anumite forme patratice atașate acestor algebri și este la fel de important ca studiul caracteristicii unui corp. În lucrarea de față, vom da câteva proprietăți ale unor forme patratice definite pe algebri de cuaternioni, vom evidenția modul în care aceste forme patratice pot duce la caracterizarea acestor algebri de cuaternioni și vom evidenția legatura lor cu studiul nivelului și subnivelului unor algebri de cuaternioni cu diviziune.

## Bibliografie

- [1] Ravi P. Agarwal, Cristina Flaut, *An Introduction to Linear Algebra*, New York, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017, pp. 1-5.
- [2] C. Nastasescu, C. Nita, C. Vraciu, *Bazele Algebrei*, Bucuresti, Editura Academiei RSR, 1986,p. 18, pp. 130, 153-157, 242-259.
- [3] D. Fetcu, *Elemente de algebra liniara, geometrie analitica și geometrie diferențială*, Iași, Casa Editorială Demiurg, 2009, 65-71.
- [4] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1985, pp. 1-3, pp.5-6, p. 8
- [5] David W. Lewis, *Quaternion Algebras and the Algebraic Legacy of Hamilton's Quaternions*, Irish Math. Soc. Bulletin, 57(2006), 43-46.
- [6] David. W. Lewis, *Levels of Quaternion Algebras*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 19(3)(1989), pp.787.

# Elemente care caracterizează o algebră în construcția Cayley-Dickson

Remus BOBOESCU

Scoala doctorală de Matematică, Universitatea Ovidius din Constanța

remus\_boboescu@yahoo.com

## Abstract

In aceasta comunicare, vom prezenta cateva proprietati ale algebrelor obtinute prin procedeul Cayley-Dickson. Procedeul Cayley–Dickson este practic o relație de recurență care permite ca, pornind de la o algebra data  $A$ , sa construim noi algebre care au dimensiunea dublul dimensiunii algebrei  $A$ . Vom introduce o funcție de două variabile, notată  $T$  care poate fi privita ca o generalizare a produsul scalar intr-un spatiu vectorial real  $n$ -dimensional. Proprietățile funcției  $T$  sunt analizate pentru algebrele de cuaternioni si octonioni. Folosind funcția  $T$  este exprimat comutatorul a doi quaternioni. La final, se prezintă elementele care ar permite generalizarea proprietăților funcției  $T$  pentru octonioni si pentru orice algebra obtinuta prin procedeul Cayley-Dickson.

## Bibliografie

- [1] C. Flaut, V. Shpakivskyi, *Some identities in algebras obtained by the Cayley-Dickson process*, Adv. Appl. Clifford Algebras, 23(1)(2013), 63-76, DOI: 10.1007/s00006-012-0344-6.
- [2] L. Popa, *Forme liniare, Forme Biliniare, Forme pătratice*, [http://math.eti.tuiasi.ro/lpopa/forme\\_liniare\\_biliniare\\_patratice.pdf](http://math.eti.tuiasi.ro/lpopa/forme_liniare_biliniare_patratice.pdf) (22.11.2020)
- [3] L. Popa, *Spatii liniare*, [http://math.eti.tuiasi.ro/lpopa/spatii\\_liniare.pdf](http://math.eti.tuiasi.ro/lpopa/spatii_liniare.pdf)(22.11.2020)
- [4] Lucian Maticiuc, *Forme biliniare. Forme pătratice. Sinteză*, [https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/curs%20VIII,%20IX,%20X\\_Forme%20patratice\\_sinteză.pdf](https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/curs%20VIII,%20IX,%20X_Forme%20patratice_sinteză.pdf)
- [5] Leandra Vicci, *Quaternions and Rotations in 3-Space: The Algebra and its Geometric Interpretation*, TR01-014 UNC Chapel Hill, Department of Computer Science 2001.
- [6] Thomas D. Howell, Jean-Claude Lafon, *The Complexity of quaternion product*, TR 75-245, June 1975.
- [7] John Vince, *Quaternions for Computer Graphics*, Springer-Verlag London Limited, 2011.
- [8] R. D. Schafer, *An introduction to Nonasociative Algebras*. Stillwater, Oklahoma, 1961.

# Grupuri finite

Alexandru TANASĂ

Școala doctorală de Matematică, Universitatea Ovidius din Constanța,  
tanasa\_alexandru10@yahoo.com

## Abstract

In aceasta lucrare, ne propunem să descriem grupurile finite, mai întâi grupurile de ordin 4, 6, 8, 9 și 10 prin descrierea elementelor lor și utilizând teoreme comune. Cu ajutorul teoremelor lui Sylow, putem să caracterizăm o parte din aceste grupuri, și anume pe cele de ordin  $pq$ ,  $p^2q$ , unde  $p$  și  $q$  sunt numere prime, sau chiar pe cel de ordin 255. Studiul grupurilor finite deschide o cale de cercetare în domeniul cristalografiei, al laticelor sau al algebrelor logice. Analiza grupurilor diedrale, constituie din simetriile poligoanelor regulate, reprezintă un mijloc de a crea artă, design și dezvăluie mai multe secrete din natură.

## Bibliografie

- [1] J.A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, 9th edition, Cengage Learning, 2017.
- [2] T.W. Hungerford, *Abstract Algebra. An Introduction*, Third Edition, Books/Cole, 2014.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele Algebrei*, Ed. Academiei RSR, București, 1986.
- [4] D. Popescu, *Elemente de teoria grupurilor finite*, Ed. Științifică și Encyclopedică, București, 1986.
- [5] I. Purdea, C. Pelea, *Probleme de algebră*, Ed. EIKON, 2007.
- [6] M. Tărnăuceanu, *Structuri algebrice fundamentale*, note de curs.