Derivate. Aplicații ale derivatelor.

· **Def**: Fie $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I = nevidă și $x_0 \in I$, pct de acumulare.

$\exists (x_n)_{n\geq 1} \subset I \setminus \{x_0\}$ a.î. $x_n \to x_0$.

Spunem că f admite derivată în $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

↳ închiderea lui $\mathbb{R}$.

$$\left[\cdot\ l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f \text{ cont în } x_0 \right].$$

· Spunem că f este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow \exists$, finită

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \text{ (nr. real finit)}.$$

Consecință: $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_s(x_0)$, finit

$\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$, finit

$\Rightarrow f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \Leftrightarrow f$ deriv în x_0.

Aplicație: Det perechea reali m și n a.î. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \leq 2 \\ mx+n, & x>2 \end{cases}$$ să fie deriv în $x_0 = 2$.

Soluție: Remarcă! $\boxed{\forall f \text{ deriv în } x_0 \Rightarrow f \text{ cont în } x_0}$

$\not\Leftarrow$ · $\boxed{\text{Exemplu}}$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$\boxed{x_0 = 0}$

· f cont în $x_0 = 0 \Leftrightarrow$ $l_s(0) = \lim\limits_{x\nearrow 0}(-x) = 0$

$l_d(0) = \lim\limits_{x\searrow 0} x = 0 = f(0)$

$\Rightarrow f$ cont în $x_0=0$

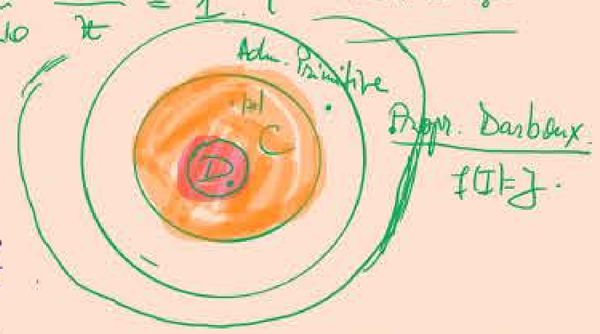
· f = deriv în $x_0=0 \Leftrightarrow f'_s(0) = f'_d(0) = f'(0)$.

$$f'_s(0) = \lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{-x}{x} = -1$$

$$\#$$

$$f'_d(0) = \lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0}\frac{x}{x} = 1$$

$\Rightarrow f$ nu e deriv în $x_0=0$



Obs: $\left[f'_s(0) = -1;\ f'_d(0) = 1 \Rightarrow \right.$

$\Rightarrow x_0 = 0$ punct unghiular pt G_f

Def: · $x_0 \in I$, pct de acum pt I s.n. pct. unghiular pt f

$\Leftrightarrow f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ și cel puțin una este finită.

· $x_0 \in I$ s.n. pct. de întoarcere pt $f \Leftrightarrow$

$f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ și infinite.

Aplicație: Det perechea reali m și n a.î. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x\leq 2 \\ mx+n, & x>2\end{cases}$ să fie deriv în $x_0=2$

Soluție: f deriv în $x_0 = 2 \Rightarrow f$ cont în $x_0 = 2 \Leftrightarrow l_s(2) = l_d(2) = f(2)$

$\Leftrightarrow \boxed{3 = 2m+n}$ (1)

def ⇓

$$f'_s(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 2x = 4.$$

$$f'_d(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} m = m$$

$\Rightarrow \boxed{m=4}$ (2)

(2) în $(1) \Rightarrow 3 = 8+n \Rightarrow \boxed{n=-5}$

$\left[\text{Corolar: } f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x) \Leftrightarrow f \text{ deriv pe } I \right]$

ST. NATURII – TEST 4

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-1+\sqrt{x^2-x+1}, & x\in(-\infty,0) \\ x\ln(x+1), & x\in[0,+\infty) \end{cases}$.

5p a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

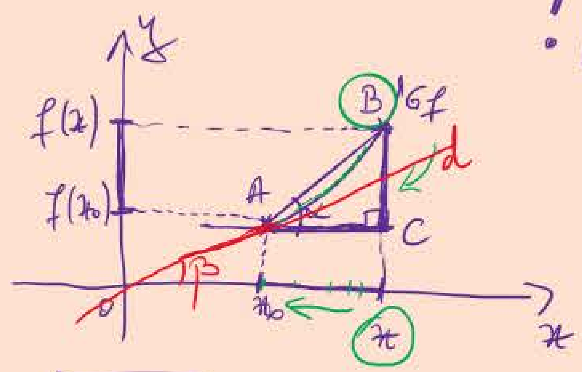
5p b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p c) Arătați că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

· Interpretarea $\boxed{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$

↳ Geometrică: Ec. tang. la G_f în $A(x_0, f(x_0))$ este:

! $\boxed{y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{= m_{tg}}(x - x_0)}$.



$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{BC}{AC} = tg\alpha$

$x\to x_0 : \alpha \to \beta : \boxed{tg\beta} = m_{tg}$

$\boxed{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{BC}{AC} = \lim_{\alpha\to\beta} tg\alpha = tg\beta = \boxed{m_d}$!

Soluție: a) f cont pe $\mathbb{R} \iff f$ cont în $x_0=0 \iff l_s(0)=l_d(0)=f(0)$.

$l_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x-1+\sqrt{x^2-x+1}) = -1+1 = 0$.

$l_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x+1) = 0\cdot\ln 1 = 0 = f(0)$ ⟹ f cont în $x_0=0$

$f|_{(-\infty,0)}$ = elem ⟹ cont pe $(-\infty,0)$

$f|_{[0,\infty)}$ = elem ⟹ cont pe $[0,\infty)$

⟹ f cont pe $\mathbb{R}$

b) f convexă pe $(0,\infty) \iff f''(x) > 0$, $\forall x\in(0,\infty)$

$f'(x) = (x\ln(x+1))' = \ln(x+1) + x\cdot\frac{1}{x+1} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

$f''(x) = (f'(x))' = \frac{{}^{x+1)}1}{x+1} + \frac{x+1-\cancel{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1+1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} > 0$, $\forall x\in(0,\infty)$

⟹ f convexă pe $(0,\infty)$.

c) $\boxed{a<0}$; tg la G_f în $A(a, f(a))$ nu este $\parallel Ox$.

⇓ prima ramură ⟹ $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$!

⟹ $f(a) = a - 1 + \sqrt{a^2-a+1}$.

Pp că $\boxed{tg_A \parallel Ox \iff \boxed{f'(a)=0}} \iff 1 + \frac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}} = 0 \iff \frac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}} = -1 \;/\cdot(-1)$

$\underbrace{1-2a}_{+} = 2\sqrt{a^2-a+1} \;/^2$ ⟹ $4a^2-4a+1 = 4(a^2-a+1)$

$\cancel{4a^2} - \cancel{4a} + 1 = \cancel{4a^2} - \cancel{4a} + 4$

$1 = 4$ (F).

⟹ pp făcută e falsă ⟹ $tg_A \nparallel Ox$.

MI – TEST 2

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

5p a) Arătați că $\boxed{f'(x)=\frac{-4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției f intersectează axa Oy.

5p c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\left(f(2)+f(4)+f(6)+\dots+f(2n)\right)^n$.

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}}$$

Soluție: a) $f'(x)=\left((x-1)^{-2}\right)'-\left((x+1)^{-2}\right)'$

$$=(-2)(x-1)^{-3}-(-2)\cdot(x+1)^{-3}=$$

$$=-\frac{\overset{(x+1)^3}{2}}{(x-1)^3}+\frac{\overset{(x-1)^3}{2}}{(x+1)^3}=\frac{-2\left[\cancel{x^3}+3x^2+3x+1-\cancel{x^3}+3x^2-3x+1\right]}{(x^2-1)^3}$$

$$=\frac{-2(6x^2+2)}{(x^2-1)^3}=\boxed{\frac{-4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}}$$

b) $G_f\cap Oy$: $\boxed{x=0}\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow O(0,0)$.

Pt. ec. tangentei: $\boxed{\text{panta}}$: $f'(0)=?\overset{a)}{\Longrightarrow} f'(0)=\frac{-4}{-1}=4$.

$\Rightarrow$ Ec. tangentei în $O(0,0)$: $y-\underbrace{f(x_0)}_{0}=\underbrace{f'(x_0)}_{4}(x-\underbrace{x_0}_{0})$.

$$\boxed{y=4x}$$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(f(2)+f(4)+\dots+f(2n)\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\cancel{\frac{1}{3^2}}+\cancel{\frac{1}{3^2}}-\cancel{\frac{1}{5^2}}+\cancel{\frac{1}{5^2}}-\cancel{\frac{1}{7^2}}+\cancel{\dots}+\cancel{\frac{1}{(2n-1)^2}}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{(2n+1)^2}\right)^n=[1^\infty]=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{-1}{(2n+1)^2}\right)^{-(2n+1)^2}\right]}_{\to e}{}^{\frac{-1}{(2n+1)^2}\cdot n}$$

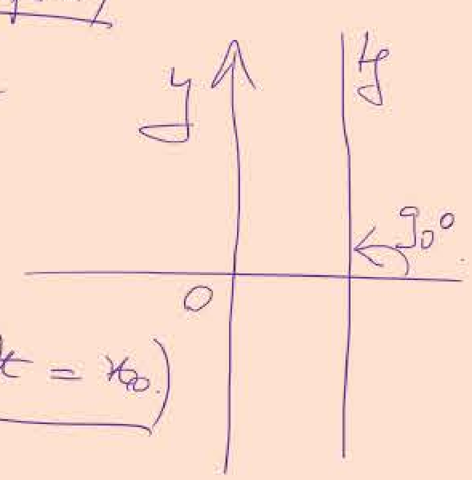
$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{(2n+1)^2}}=e^0=1.$$

Remarcă: • Derivata $\boxed{f'(x_0)}$, dacă există, este panta tang. la G_f în $A(x_0,f(x_0))$

• Dacă $f'(x_0)=0\Rightarrow t_A\parallel Ox$. $(y=f(x_0))$

• Dacă $f'(x_0)\neq0\Rightarrow t_A$ oblică.

• Dacă $f'(x_0)=\pm\infty\Rightarrow t_A\parallel Oy$. $(x=x_0)$



Rolul derivatei: $f'(x)$

- studiul monotoniei
- pctele de extrem.
- studiem natura G_f: convex, concav și pcte de inflexiune.
- rezolv. inegalități.
- $\boxed{\text{Reprezentarea } G_f.}$

ST. NATURII – TEST 3

Banica

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\boxed{f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

$f(-2)=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

a) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

b) $y=1$.

c) $\underline{\operatorname{Im} f}=?$

Tabel de variație:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-2}$ (pct critic)

$x^2+2x+2=0.$

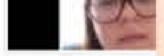
- $\Delta=4-4\cdot 2=-4<0 \Rightarrow x^2+2x+2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$
- $x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$	$- - -$		0	$+ + + +$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(-2)=-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

$\Rightarrow$ pctul $x_0=-2$ este min loc pt f

- f cont pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} f=[-\sqrt{2},\ 1)$.

MI- TEST 4



SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

a) $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

b) $\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$.

Soluție c) f bij $\iff \begin{cases} \cdot\ f = \text{inj} \iff f\ \text{s. monotonă !} \\ \cdot\ f = \text{surj} \iff \boxed{\text{Im} f = \mathbb{R}.} \end{cases}$

$\cdot\ f'(x)=\dfrac{\overset{+}{2x^2+4x+3}}{\underset{+}{x^2+x+1}}$ $(\Delta = 16-4\cdot 6=-8<0)$ $(\Delta=1-4=-3<0)$ $\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

f = strict crescătoare pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ = injectivă (1)

$\cdot\ f$ surj $\iff \text{Im} f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\ln(x^2+x+1)\right)=\infty+\infty=\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\ln(x^2+x+1)\right)=[-\infty+\infty]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(2+\underbrace{\frac{\ln(x^2+x+1)}{x}}_{\to 0}\right)=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty.$$

$\cdot\ f$ cont pe $\mathbb{R}$! $\Rightarrow \text{Im} f=\mathbb{R} \Rightarrow f=\text{surj}$ (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow f=\text{bij}$. ($\Rightarrow f$ = inversabilă)

MI – TEST 3

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x-1\le 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$.

$$= \frac{(x-1)^2}{e^x}$$

a) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \dots$

Solutie: b) $f'(x)=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=3.$

x	$-\infty$ 1 3 ∞
$f'(x)$	$-\ -\ 0\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -\ -$
$f(x)$	$\searrow$ $f(1)$ $\nearrow$ $f(3)$ $\searrow$

min   max

$\Rightarrow \begin{cases} \forall x\in(-\infty,1]\cup[3,\infty) \Rightarrow f \searrow \\ \forall x\in(1,3) \Rightarrow f \nearrow \end{cases}$

c) pt $x\in[1,3] \Rightarrow \forall x\ge 1 \Rightarrow f(x)\ge f(1).$

$\forall x\le 3 \Rightarrow f(x)\le f(3)=\frac{4}{e^3}.$

pt $x\in[3,\infty) \Rightarrow x\ge 3 \Rightarrow f(x)\le f(3)=\frac{4}{e^3}.$

$\Rightarrow f(x)\le f(3)=\frac{4}{e^3},\ \underline{\forall x\ge 1.} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{e^x}\le\frac{4}{e^3}\ \Big|\cdot e^x$

$(x-1)^2\le 4\cdot\frac{e^x}{e^3} \Rightarrow (x-1)^2\le 4e^{x-3}\ \Big|\sqrt{\ }$

$x\ge 1 \Rightarrow |x-1| = x-1 \le 2\cdot\sqrt{e^{x-3}}$

$\Rightarrow \boxed{x-1\le 2\cdot e^{\frac{x-3}{2}},\ \forall x\ge 1}.$