Legi de compoziție. Proprietati

Tuesday, March 16, 2021 5:34 PM

## Definiție

- O lege de compoziție (**operație algebrică**) pe o mulțime nevidă $M$ este o funcție $\varphi : M \times M \to M$.
  - $(x, y) \xrightarrow{\varphi} \varphi(x, y) =: x * y$ sau $x \circ y$ sau $x \cdot y \dots$ $x+y$, $x \top y$, $x \perp y \dots$
    - $\varphi(x, y)$ se numește compusul lui $x$ cu $y$.

  Câte legi de compoziție se pot defini pe o mulțime cu 2 elemente?
- Exemple: Scăderea pe $\mathbb{N}$? Nu
  - Adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{N}$.
  - Adunarea, scăderea, înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
  - Adunarea și înmulțirea matricelor din $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  - Compunerea pe mulțimea $\mathscr{F}(X)$ a funcțiilor $f : X \to X$.

este asociativă, dar, în general, nu este comutativă

$X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X \qquad g \circ f : X \longrightarrow X$

$M = \{a, b\}$

$\varphi : \{a, b\} \times \{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}$

$= \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ (4 elemente; codomeniul: 2)

Câte funcții se pot defini pe o mulțime cu 4 elemente cu valori într-o mulțime cu 2 elemente? $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

$(a,a) \to a$, 2
$(a,b)$ → $b$, 2
$(b,a)$
$(b,b)$

Câte funcții definite pe o mulțime cu $n$ elemente cu valori într-o mulțime cu $m$ elemente există?

$\underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n} = m^n$ funcții

## Proprietăți

Fie $\circ$ o lege de compoziție pe mulțimea $M$.

- Legea este asociativă dacă
  $$\forall x, y, z \in M, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$
- Legea este comutativă dacă
  $$\forall x, y \in M, x \circ y = y \circ x.$$

Exemple
- Adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{N}$ sunt legi de compoziție asociative și comutative.
- Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sunt legi de compoziție asociative și comutative.

Legea $\circ$ nu este comutativă dacă $\exists x, y \in M$ a.î. $x \circ y \neq y \circ x$

Scăderea pe $\mathbb{Z}$: Nu este asociativă și nici comutativă!

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, $(x-y)-z = x-(y-z) \iff$

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, $\cancel{x} - \cancel{y} - z = \cancel{x} - \cancel{y} + z$

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, $-z = z$ Fals

Testul 4 MI /2021

$\mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^*$

2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x * y = x^y$.

5p a) Arătați că $2*4 = 4*2$. $\quad 2*4 = 2^4 = 16$; $4*2 = 4^2 = 16 \Rightarrow 2*4 = 4*2$

5p b) Arătați că legea de compoziție „$*$" **nu** este comutativă.

5p c) Determinați numerele naturale nenule $n$ pentru care $(2*2)*n < 64$.

d) Este legea $*$ asociativă?

$x^y \neq y^x$

$x = 1, y = 2$

$x^y = 1^2 = 1$; $y^x = 2^1 = 2 \Rightarrow 1*2 \neq 2*1$

legea nu este comutativă

$2*2 = 2^2 = 4 \Rightarrow (2*2)*n =$

$= 4*n = 4^n < 64$

$4^n < 4^3 \iff n < 3$, $n \geq 1$ $\Rightarrow n \in \{1, 2\}$

$a * z = a^z$

$x * b = x^b$

$\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$

$\underbrace{(x*y)}_{x^y} * z = x * \underbrace{(y*z)}_{y^z}$

$(x^y)^z = x^{yz}$; $\quad x^{y^z}$

Să găsim $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^{yz} \neq x^{y^z}$

$x = 2$, $y = 3$, $z = 4$: $x^{yz} = 2^{12}$, $x^{y^z} = 2^{3^4}$

$2^{12} \neq 2^{3^4}$ pt. că $12 \neq 3^4$

$\Rightarrow$ legea $*$ nu este asociativă

$X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} X$

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

## Proprietăți

Fie $\circ$ o lege de compoziție pe mulțimea $M$.

- Legea are element neutru dacă
  $\exists\, e \in M$ astfel încât $\forall x \in M, e \circ x = x \circ e = x$.
- Dacă legea are element neutru $e$, un element $x \in M$ se numește simetrizabil dacă
  $\exists x' \in M$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e$.

Exemple
- 0 este element neutru la adunarea din $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Scăderea pe $\mathbb{Z}$ are element neutru? NU
- Matricea $0_n$ este element neutru la adunarea pe $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Matricea $I_n$ este element neutru la înmulțirea pe $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Legea $*$ de la ex. anterior are element neutru? NU!

$e \in \mathbb{Z}$: $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x - \overset{e=0}{e} = e - x = x$

$0_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

Pp că $\exists e \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall x \in \mathbb{N}^*$ $\quad e * x = x * e = x$

$e^x = x^e = x$

$x = 1 \Rightarrow e = 1 = 1 \Rightarrow \boxed{e = 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}^*$, $1^x = x^1 = x$, adică $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $1 = x$ fals

Exercitii

Sunday, April 25, 2021 7:15 PM

## Testul 3 MI / 2021

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = |x - y|$.

**5p** **a)** Arătați că $(5*2)*1 = 2$.

**5p** **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$" este comutativă.

**5p** **c)** Demonstrați că $(a*b)+(b*c) \geq a*c$, pentru orice numere reale $a$, $b$ și $c$.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$(a*b)+(b*c) \geq a*c$

$|\underbrace{a-b}_{x}| + |\underbrace{b-c}_{y}| \geq |\underbrace{a-c}_{x+y}|$

$(a-b)+(b-c) = a-c$

$\left.\begin{array}{l} a-b=x \\ b-c=y \end{array}\right| \Leftrightarrow a-c = x+y$

$|x+y| \leq |x|+|y|$ inegalitatea triunghiului

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

a) $(\underbrace{5*2}_{3})*1 = 3*1 = |3-1| = |2| = 2$

$5*2 = |5-2| = |3| = 3$

b) legea $*$ este comutativă dacă $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x*y = y*x$

$x*y = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = y*x \Rightarrow$ legea $*$ este comutativă

$|a-b|+|b-c| \geq |a-c|$

1. $a \geq b \geq c$ 3. $b \geq a \geq c$ 5. $c \geq a \geq b$

2. $a \geq c \geq b$ 4. $b \geq c \geq a$ 6. $c \geq b \geq a$

1.: $a - \cancel{b} + \cancel{b} - c \geq a - c \Leftrightarrow a-c \geq a-c$ A

2. $\cancel{a} - b + c - b \geq \cancel{a} - c$

$-2b \geq -2c \;|:(-2)$

$b \leq c$ A

## Testul 7 MI / 2021

**2.** Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{2(x+y)}{xy+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $x*0 = x$, pentru orice $x \in M$. (legea $*$ are element neutru?)

**5p** **b)** Arătați că $x*y < 2$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.

**5p** **c)** Determinați perechile $(m, n)$ de numere naturale nenule pentru care $m*n$ este număr natural.

a) $x*0 = \frac{2(x+0)}{x \cdot 0 + 2} = \frac{2x}{2} = x$

b) $\forall x, y \geq 1$, $x*y < 2 \Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{xy+2} < 2 \;\Big|:2 \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy+2} < 1$

$\Leftrightarrow x+y < xy+2 \Leftrightarrow xy+2-x-y > 0$

$x(y-1)-(y-1)+1 > 0$

$\underbrace{\underbrace{(y-1)}_{\geq 0}\underbrace{(x-1)}_{\geq 0}}_{\geq 0} + 1 > 0$ A

$\geq 1 > 0$

$m, n \geq 1$ (b)

$\underset{>0}{1 \leq m*n} < 2 \Rightarrow m*n = 1$, $m,n \in \mathbb{N}$

$\frac{2(m+n)}{mn+2} = 1$

$2(m+n) = mn+2$

$mn - 2m - 2n + 2 = 0$

$\underbrace{m(n-2) - 2(n-2)}_{-2n+4} - 2 = 0$

$\underset{\geq -1}{(n-2)}\underset{\geq -1}{(m-2)} = 2$

$(-1)(-2)$

$\Rightarrow \begin{cases} n-2=1 \\ m-2=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} n-2=2 \\ m-2=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} n=4 \\ m=3 \end{cases}$

$\Rightarrow (3,4)$ și $(4,3)$.

Varianta II la (b)

$5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} = 5\left(xy + \frac{x}{5} + \frac{y}{5} + \frac{1}{25}\right) - \frac{1}{5}$

$= 5xy + x + y + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{5}}$

$= x \circ y$

## Testul 7 SN / 2021

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + 5xy + y$.

**5p** **a)** Verificați dacă $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$".

**5p** **b)** Demonstrați că $x \circ y = 5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Calculați partea întreagă a numărului $q = \left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)$.

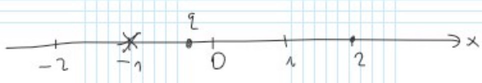
$x \circ \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}$

$\left(-\frac{1}{5}\right) \circ y = -\frac{1}{5}$

$q = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \left(-\frac{1}{4}\right)}_{x} \circ \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right) \circ \cdots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)}_{y}$

$= \underbrace{x \circ \left(-\frac{1}{5}\right)}_{-\frac{1}{5}} \circ y = \left(-\frac{1}{5}\right) \circ y = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow q = -\frac{1}{5} \Rightarrow [q] = -1$




a) $e = 0$ este element neutru dacă $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \circ e = e \circ x = x$

$\left.\begin{array}{l} x \circ 0 = x + 5x \cdot 0 + 0 = x \\ 0 \circ x = 0 + 5 \cdot 0 \cdot x + x = x \end{array}\right\} \Rightarrow x \circ 0 = 0 \circ x = x$, deci $0$ = el. neutru.

b) Varianta I

$x \circ y = x + 5xy + y = 5\left(xy + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y\right) = 5\left[\left(xy + \frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{5}y\right] =$

$= 5\left[x\left(y+\frac{1}{5}\right) + \underbrace{\frac{1}{5}\left(y+\frac{1}{5}\right)}_{\frac{1}{5}y + \frac{1}{25}} - \frac{1}{25}\right] = 5\left[\left(y+\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{25}\right] =$

$= 5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$

## Testul 6 TEHN / 2021

**2.** Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{12}{x+y}+\frac{3}{x}+\frac{3}{y}$.

**5p** **a)** Arătați că $1*3=4$.

**5p** **b)** Arătați că $x*x=x^2$, pentru orice $x\in M$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural nenul $n$ pentru care $(n*n)*(n*n)=1$.

a) $\underbrace{1*3=1\cdot 3-\frac{12}{1+3}+\frac{3}{1}+\frac{3}{3}}=\ldots=4$

b) $x*x=x^2-\frac{12}{x+x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=x^2-\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{2}x}+\frac{6}{x}=x^2-\cancel{\frac{6}{x}}+\cancel{\frac{6}{x}}=x^2$

c) $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ :

$(b) \quad n*n=n^2 \Rightarrow (n*n)*(n*n)=n^2*n^2=(n^2)^2=n^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^4=1 \Rightarrow n=1$

## Definiția grupului

Fie $G$ o mulțime nevidă și $\circ : G \times G \to G$ o lege de compoziție (sau operație algebrică) pe $G$. Perechea $(G, \circ)$ se numește grup dacă

- legea $\circ$ este asociativă, adică
$$\forall x, y, x \in G, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$
- legea $\circ$ admite element neutru, adică
$$\exists e \in G \text{ astfel încât } \forall x \in G, x \circ e = e \circ x = x.$$
- orice $x \in G$ are simetric relativ la $\circ$, adică
$$\forall x \in G, \exists x' \in G \text{ astfel încât } x \circ x' = x' \circ x = e.$$

Dacă legea $\circ$ este comutativă, grupul se numește comutativ sau abelian.

## Exemple

Exemple de grupuri:

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sunt grupuri comutative.
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt grupuri comutative.
- $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$. $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ este grup necomutativ pentru $n \geq 2$.
- $\mathcal{S}(X) = \{f : X \to X | f \text{ bijecție }\}$. $(\mathcal{S}(X), \circ)$ este grup necomutativ dacă $X$ are cel puțin 3 elemente.
- Fie $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$ este grup cu înmulțirea numerelor complexe. *Grupul rădăcinilor de ordinul n ale unității*.

$z_1, z_2 \in U_n$
$\Rightarrow z_1^n = z_2^n = 1$
$\Rightarrow (z_1 z_2)^n = 1$

$1 \in U_n$
$z^n = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1$

Testul 16 Mi /2020

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + a$, unde $a$ este număr real.

5p a) Determinați numărul real $a$ pentru care $(-1) * 1 = 0$.

5p b) Determinați numărul real $a$ pentru care legea de compoziție „$*$" admite element neutru. $a = 12$ $(e = 4)$

5p c) Demonstrați că, dacă $a \in [12, +\infty)$, atunci mulțimea $[3, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$".

d) Există valori ale lui $a$ pentru care $[3, \infty)$ este grup cu legea de compoziție $*$ ?

$\to$ P.S pentru $a \geq 12$
$\to$ E.N $e = 4$ pentru $\boxed{a = 12}$

a) $(-1) * 1 = -1 \cdot 1 - 3(-1) - 3 \cdot 1 + a = -1 + \cancel{3} - \cancel{3} + a = a - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

b) Legea $*$ are element neutru dacă $\exists\, e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \circ e = e \circ x = x$

$x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xe - 3x - 3e + a = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow xe - 4x - 3e + a = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x(\underline{e - 4}) - 3e + a = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$(A x + B = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Downarrow$

$\Leftrightarrow \quad x(\underbrace{e-4}) - 3e + a = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\left( \begin{array}{l} Ax + B = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Downarrow \\ A = 0 \text{ și } B = 0 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \ e - 4 = 0$ și $-3e + a = 0$

$\Leftrightarrow \ e = 4$ și $\boxed{a = 12}$

c) $x * y = xy - 3x - 3y + a$

$[3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$

dacă: $\forall x, y \in [3, \infty), \ x * y \in [3, \infty)$

$a \geq 12 \Rightarrow \forall x, y \in [3, \infty), \ xy - 3x - 3y + a \in [3, \infty)$

$\forall x, y \geq 3, \ \underline{xy - 3x - 3y + a \geq 3}$

$x(y-3) - 3(y-3) + a - 9 \geq 3$

$-3y + 9$

$\underbrace{(y-3)}_{\geq 0}\underbrace{(x-3)}_{\geq 0} + \underbrace{a - 12}_{\geq 0} \geq 0$ (A)

d) Dacă $([3, \infty), *)$ este grup $\Rightarrow$ $*$ are el neutru $\Leftrightarrow$ $a = 12$ $(e = 4)$

$x * y = xy - 3x - 3y + 12$

$\forall x \in [3, \infty), \ \exists x' \in [3, \infty)$ a.î. $x * x' = x' * x = 4$

$x * x' = 4 \Leftrightarrow xx' - 3x - 3x' + 12 = 4$

$x'(x - 3) = 3x - 8$

$x = 3$ nu este simetrizabil $\Rightarrow$ $[3, \infty)$ nu este grup pt. nicio valoare a lui $a$.

$(3, \infty)$ $\quad x' = \dfrac{3x - 8}{x - 3} > 3 \Leftrightarrow \cancel{3x} - 8 > \cancel{3x} - 9$ (A) $\quad (x - 3 > 0)$

$\Rightarrow x' \in (3, +\infty)$ $\quad \Rightarrow ((3, +\infty), *)$ grup comutativ

## Morfisme și izomorfisme

Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri și $f : G \to G'$ o funcție. Funcția $f$ se numește morfism de grupuri dacă

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y) \text{ pentru orice } x, y \in G.$$

Dacă, în plus, $f$ este bijectivă, atunci $f$ se numește izomorfism de grupuri. Două grupuri $(G, \circ)$ și $(G', *)$ între care există un izomorfism se numesc grupuri izomorfe. Scriem $G \simeq G'$.

Exemple:

- $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\{1, -1\}, \cdot), f(n) = (-1)^n$ este morfism de grupuri.
- $f : (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot), f(x) = e^x$ este izomorfism de grupuri.
- $f : (U_4, \cdot) \to (\mathbb{Z}_4, +), f(1) = \widehat{0}, f(i) = \widehat{1}, f(-1) = \widehat{2}, f(-i) = \widehat{3}$. este izomorfism de grupuri.

| $\cdot$ | $1$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $-1$ |
| $-1$ | $-1$ | $1$ |

$$f(m+n) = (-1)^{m+n} = (-1)^m \cdot (-1)^n = f(m) \cdot f(n)$$

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) f(y)$$

Testul 7 MI /2021

**2.** Pe mulţimea $G = (0,1)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$. ✓

5p **b)** Verificaţi dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”. ✓ Nu uitați: definiția elementului neutru

5p **c)** Ştiind că $(G,*)$ este grup, (Demonstrați) demonstraţi că funcţia $f : G \to M$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ $(0,1) \quad (0,\infty)$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$, unde $M = (0,+\infty)$ şi „$\cdot$” reprezintă operaţia de înmulţire a numerelor reale.

c) $f$ este morfism: $\forall x, y \in (0,1)$, $f(x*y) = f(x) f(y)$

$$f(x*y) = \frac{1}{x*y} - 1 = \frac{2xy - x - y + 1}{xy} - \frac{xy}{1} =$$

$$= \frac{xy - x - y + 1}{xy} = \frac{x(y-1) - (y-1)}{xy} = \frac{(y-1)(x-1)}{xy} =$$

$$= \frac{x-1}{x} \cdot \frac{y-1}{y} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{y}\right) = f(x) f(y)$$

$= \frac{x-1}{x} \cdot \frac{y-1}{y} = \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right) = \underbrace{f(x)f(y)}$

f este bijectivă < inj / surj.

f este injectivă dacă $\forall x, y \in (0,1)$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cancel{-1} = \frac{1}{y} \cancel{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$ ✓

f este surjectivă dacă: $\forall y \in (0, \infty)$, $\exists x \in (0,1)$ a.î. $f(x) = y$.

$f : (0,1) \to (0, \infty)$ | Fie $y \in (0, \infty)$: $\frac{1}{x} - 1 = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y + 1$

$\Leftrightarrow 0 < x = \frac{1}{y+1} < 1$

$\Rightarrow$ f este surjectivă. $\square$

Testul 13 SN/2020

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{3}xy + x + y$.

**5p** **a)** Demonstrați că $x \circ y = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **b)** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 3$. Arătați că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Demonstrați că $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = \frac{(x_1+3)(x_2+3) \cdot \ldots \cdot (x_n+3) - 3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și orice numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ și $x_n$.