# Grafuri.

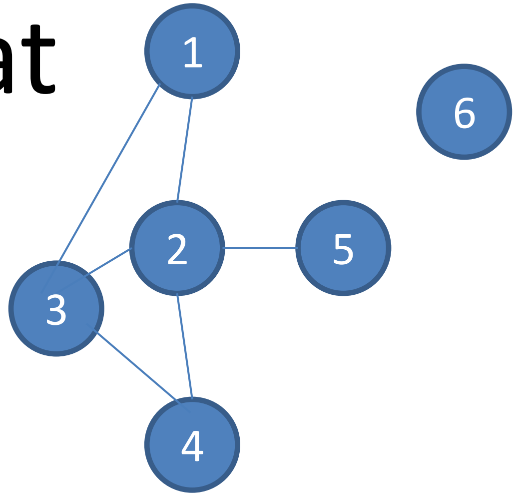
Conf. dr. Elena BAUTU
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea "Ovidius" Constanța

# Programa de BAC

- Grafuri neorientate:
  - terminologie: nod/varf, muchie, adiacenta, incidenta, grad, lant elementar, ciclu, ciclu elementar, lungime, subgraf, graf partial;
  - proprietati: conex, componenta conexa, graf complet
  - metode de reprezentare in memorie: matrice de adiacenta, liste de adiacenta

- Arbori:
  - terminologie: nod, muchie, radacina, descendent, descendent direct/fiu, ascendent, ascendent direct/parinte, frati, nod terminal, frunza,
  - metode de reprezentare in memorie: matrice de adiacenta, vector de ‘tați’

# Graf neorientat




Un **graf neorientat** este o pereche ordonata G = (V, E) unde:

- V = {v1, v2, v3, …, vn} este o multime finita si nevida. Elementele ei se numesc **noduri/varfuri**.
- E = {(vi, vj) | i!=j AND vi, vj $\in$V} este o multime neordonata de perechi (neordonate) de varfuri. Elementele ei se numesc **muchii**. O muchie uneste 2 noduri.

In graful G = (V, E), **nodurile** distincte vi si vj se numesc **adiacente** daca $\exists$ muchia (vi, vj)$\in$E

Spunem ca **muchia** (vi,vj) $\in$E este **incidenta** la nodurile vi,vj.

Prin **gradul** unui nod v se intelege numarul muchiilor incidente cu nodul v.

Un nod cu grad 1 se numeste **nod terminal**. Un nod cu grad 0 se numeste nod **izolat**.

Muchia (1,3) este incidenta la varfurile 1 si 3.
Varful 2 este adiacent cu varfurile 1, 3, 4, 5
Varful 4 nu este adiacent cu 5.
Varful 5 este *terminal*.
Varful 6 este *izolat*.

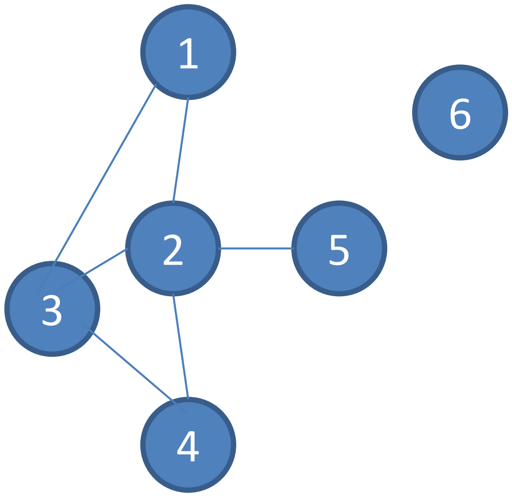
Daca notam
gi = gradul nodului i:

g1+g2+…+gn = 2 * m,
unde m = numarul de muchii

# Memorarea grafurilor: matrice de adiacență

- Dat un graf G = (V, E) cu n noduri, numim **matrice de adiacență** A o matrice pătratică de dimensiune **n x n** în care elementele sunt:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E \\ 0, & (i, j) \notin E \end{cases}$$




Matricea de adiacenţă este simetrică: $a_{ij} = a_{ji}$

Elementele de pe diagonala principala sunt 0.

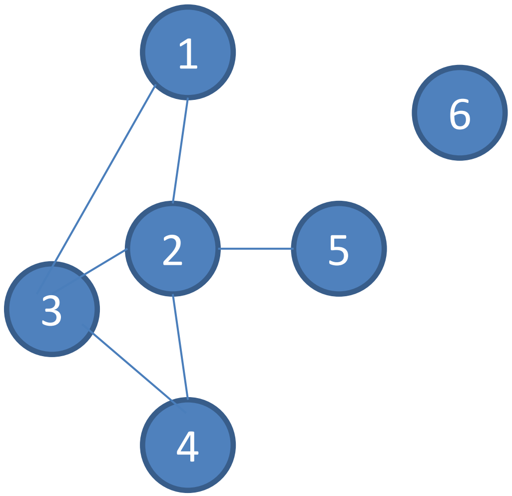
Matricea de adiacenta a grafului alaturat:

Elementul de pe linia 1, coloana 4 = ?
Elementul de pe linia 4, coloana 5 = ?
Elementul de pe linia 6, coloana 5 = ?

# Memorarea grafurilor: matrice de adiacență

- Dat un graf G = (V, E) cu n noduri, numim **matrice de adiacență A** o matrice pătratică de dimensiune n x n în care elementele sunt:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E \\ 0, & (i,j) \notin E \end{cases}$$




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Gradul nodului i = suma elementelor de pe linia i

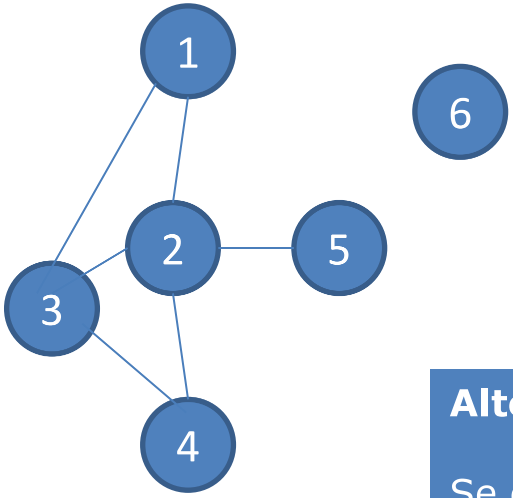
Gradul nodului i = suma elementelor de pe coloana i

Suma tuturor elementelor din matrice = suma gradelor tuturor nodurilor = 2 * nr de muchii

Observatie: Este indicata folosirea matricei de adiacenta pt grafurile cu numar mare de muchii.

# Memorarea grafurilor: liste de adiacență

- Pentru fiecare nod, se memoreaza lista nodurilor adiacente cu el.
- Dat graful G=(V,E) cu **n** noduri si **m** muchii:




1 → 2, 3
2→ 1, 3, 4, 5
3→1, 2, 4
4 → 2, 3
5→ 2
6→

Dpdv practic: implementare cu alocare statica / dinamica

**Alternativ: Memorarea grafurilor: lista muchiilor**

Se defineste o structura muchie, cu 2 campuri, cate unul pentru fiecare nod implicat
Se memoreaza un vector de structuri muchie

**4.** Un graf neorientat are **6** noduri, numerotate de la **1** la **6**, și muchiile **[1,2]**, **[1,3]**, **[2,3]**, **[2,4]**, **[2,5]**, **[2,6]**, **[3,4]**, **[4,5]**. Indicați numărul nodurilor care au gradul un număr par.

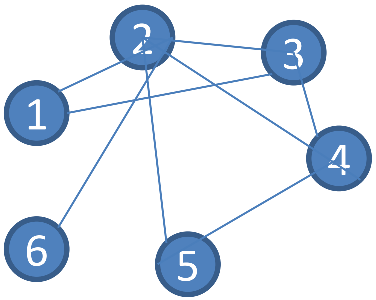
**a.** 5 **b.** 4 **c.** 3 **d.** 2

Putem calcula gradul fiecarui nod numarand muchiile incidente in acesta:
Nodul 1 apare in 2 muchii, are grad 2; etc…

**4.** Un graf neorientat are **6** noduri, numerotate de la **1** la **6**, și muchiile **[1,2]**, **[1,3]**, **[2,3]**, **[2,4]**, **[2,5]**, **[2,6]**, **[3,4]**, **[4,5]**. Indicați numărul nodurilor care au gradul un număr par.

**a.** 5 **b.** 4 **c.** 3 **d.** 2

Putem calcula gradul fiecarui nod numarand muchiile incidente in acesta:
Nodul 1 apare in 2 muchii, are grad 2; etc…




Liste de adiacenta:
1 → 2, 3
2 → 1, 3, 4, 5, 6
3 → 1, 2, 4
4 → 2, 3, 5
5 → 2, 4
6 → 2

**Grad(1)=2**
Grad(2)=5
Grad(3)=3
Grad(4)=3
**Grad(5)=2**
Grad(6)=1

**5.** Un graf neorientat are **6** noduri, numerotate de la **1** la **6**, și muchiile **[1,2]**, **[1,3]**, **[2,3]**, **[2,4]**, **[2,5]**, **[2,6]**, **[3,4]**, **[4,5]**. Indicați numărul nodurilor care au gradul un număr impar.

**a.** 5 **b.** 4 **c.** 3 **d.** 2

Reprezentam graful prin liste de adiacenta:

5. Un graf neorientat are **6** noduri, numerotate de la **1** la **6**, și muchiile **[1,2]**, **[1,3]**, **[2,3]**, **[2,4]**, **[2,5]**, **[2,6]**, **[3,4]**, **[4,5]**. Indicați numărul nodurilor care au gradul un număr impar.

**a.** 5 **b.** 4 **c.** 3 **d.** 2

Reprezentam graful prin liste de adiacenta:

1 → 2, 3 (gradul 2)

2 → 1, 3, 4, 5, 6 (gradul 5)

3 → 1, 2, 4 (gradul 3)

4 → 2, 3, 5 (gradul 3)

5 → 2, 4 (gradul 2)

6 → 2 (gradul 1)

5. Un graf neorientat are 6 noduri, numerotate de la 1 la 6, și muchiile [1,2], [1,3], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6], [3,4], [4,5]. Indicați numărul nodurilor care au gradul un număr impar.

a. 5 b. 4 c. 3 d. 2

Reprezentam graful prin liste de adiacenta:

1 → 2, 3 (gradul 2)

2 → 1, 3, 4, 5, 6 (gradul 5)

3 → 1, 2, 4 (gradul 3)

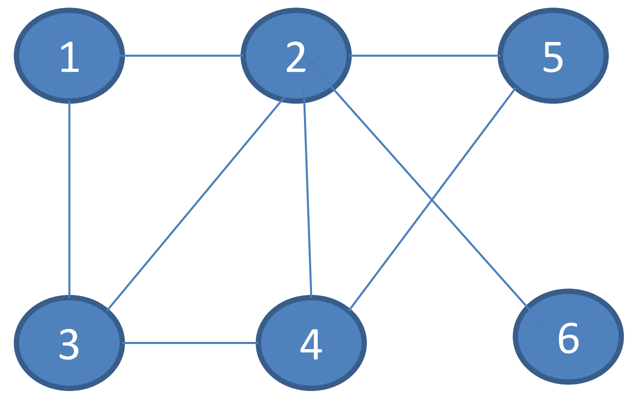
4 → 2, 3, 5 (gradul 3)

5 → 2, 4 (gradul 2)

6 → 2 (gradul 1)

Deci avem 4 noduri de grad impar.

Alternativ, desenam graful ☺



**5.** Indicați numărul grafurilor neorientate, distincte, cu **5** noduri, care se pot construi. Două grafuri sunt distincte dacă matricele lor de adiacență sunt diferite.

**a.** $5^4$ **b.** $5^2$ **c.** $2^{10}$ **d.** $4^{10}$

**5.** Indicați numărul grafurilor neorientate, distincte, cu **5** noduri, care se pot construi. Două grafuri sunt distincte dacă matricele lor de adiacență sunt diferite.

**a.** $5^4$ **b.** $5^2$ **c.** $2^{10}$ **d.** $4^{10}$

Matrice de adiacenta are proprietatile:
- diagonala plina cu 0
- este simetrica.

Nr de grafuri distincte pe care le putem construi =
nr de matrice de adiacenta 5x5 distincte pe care le putem construi =
nr de moduri in care putem umple cu 0 si 1 partea superioara a unei matrice 5x5

5. Indicați numărul grafurilor neorientate, distincte, cu **5** noduri, care se pot construi. Două grafuri sunt distincte dacă matricele lor de adiacență sunt diferite.

**a.** $5^4$ **b.** $5^2$ **c.** $2^{10}$ **d.** $4^{10}$

Matrice de adiacenta are proprietatile:
- diagonala plina cu 0
- este simetrica.

Nr de grafuri distincte pe care le putem construi =
nr de matrice de adiacenta 5x5 distincte pe care le putem construi =
nr de moduri in care putem umple cu 0 si 1 partea superioara a unei matrice 5x5

Partea superioara a matricei are (5x5 – 5) / 2 = 10 elemente
In cate moduri putem umple 10 elemente cu 0 sau 1?

Fiecare element – in 2 moduri; Stiind ca sunt independente
Deci in 2 x 2 x 2 … x 2 = $2^{10}$ moduri.

**5.** Indicați numărul grafurilor neorientate, distincte, cu **5** noduri, care se pot construi. Două grafuri sunt distincte dacă matricele lor de adiacență sunt diferite.

**a.** $5^4$ **b.** $5^2$ **c.** $2^{10}$ **d.** $4^{10}$

Matrice de adiacenta are proprietatile:
- diagonala plina cu 0
- este simetrica.

Nr de grafuri distincte pe care le putem construi =
nr de matrice de adiacenta 5x5 distincte pe care le putem construi =
nr de moduri in care putem umple cu 0 si 1 partea superioara a unei matrice 5x5

Partea superioara a matricei are (5x5 – 5) / 2 = 10 elemente
In cate moduri putem umple 10 elemente cu 0 sau 1?

Fiecare element – in 2 moduri; Stiind ca sunt independente
Deci in 2 x 2 x 2 … x 2 = $2^{10}$ moduri.

**Sau:** ne amintim ca exista $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ grafuri distincte cu n noduri.

# Graf complet, partial, subgraf

- Prin graf **complet** se intelege un graf neorientat G = (V, E) in care oricare doua noduri sunt adiacente: $\forall i,j \in V$ cu $i \neq j$, $(i,j) \in E$.

Graf **complet** = graf in care gradul oricarui nod este **n-1**.

Graf complet:
N – nr de noduri, m – nr de muchii:
**m = n(n-1)/2**

- Graf **partial** al unui graf G = (V, E) este un graf G' = (V, E'), unde $E' \subseteq E$.
  - Deci un graf partial se obtine prin suprimarea unor *muchii* din graful original

- **Subgraf** al unui graf G = (V, E) este un graf G1 = (V1, E1) unde $V1 \subseteq V$, $E1 \subseteq E$

# Lanț, lanț elementar, ciclu, ciclu elementar

- **Lanț** = o succesiune de noduri [v1,v2,...vp], vi$\in$V, cu proprietatea ca oricare 2 noduri vecine din lanț sunt adiacente (legate printr-o muchie)
  - Lanț **elementar** = lanț în care toate **nodurile** sunt distincte
  - **Lungimea** lanțului = numarul de muchii din lant

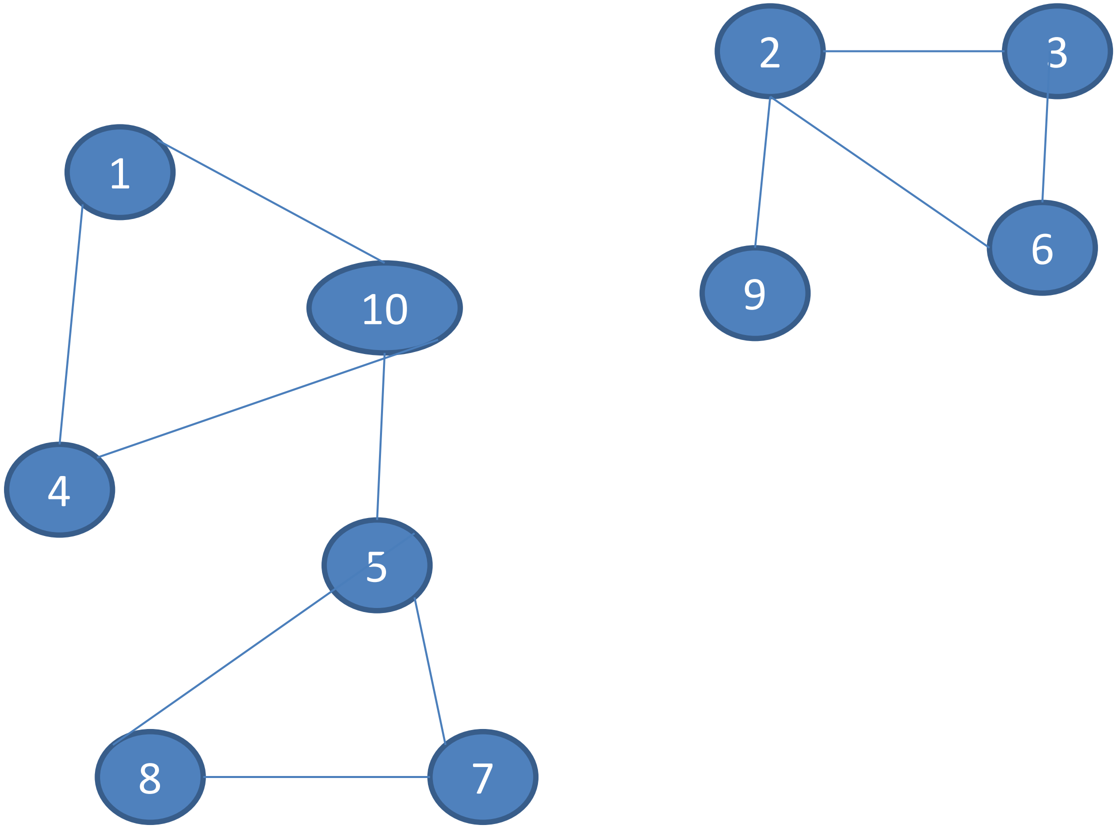
- **Ciclu** = lant care contine numai muchii distincte si in care nodul initial coincide cu nodul final
  - Daca si nodurile sunt distincte (cu exceptia primului care coincide cu ultimul), s.n **ciclu elementar**.
  - **Ciclu hamiltonian** = ciclu care trece cate o singura data prin toate nodurile grafului (cu exceptia nodului de inceput)
  - **Graf hamiltonian** = graf care admite un ciclu hamiltonian

**5.** Un graf neorientat are **10** noduri, numerotate de la **1** la **10**, și muchiile **[1,4]**, **[1,10]**, **[2,3]**, **[2,6]**, **[2,9]**, **[3,6]**, **[4,10]**, **[5,7]**, **[5,8]**, **[5,10]**, **[7,8]**. Indicați numărul minim de muchii care trebuie adăugate pentru ca graful obținut să aibă cel puțin un ciclu care să traverseze toate muchiile sale.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

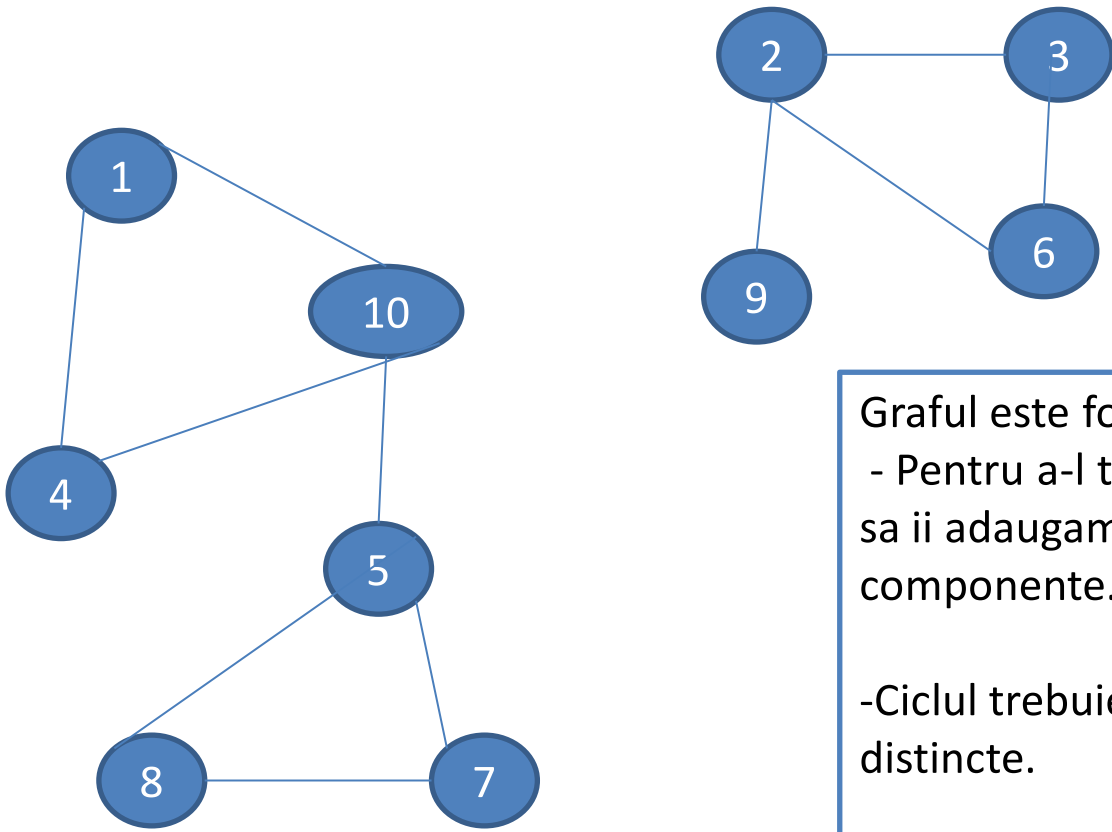
**5.** Un graf neorientat are **10** noduri, numerotate de la **1** la **10**, și muchiile **[1,4]**, **[1,10]**, **[2,3]**, **[2,6]**, **[2,9]**, **[3,6]**, **[4,10]**, **[5,7]**, **[5,8]**, **[5,10]**, **[7,8]**. Indicați numărul minim de muchii care trebuie adăugate pentru ca graful obținut să aibă cel puțin un ciclu care să traverseze toate muchiile sale.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4



**5.** Un graf neorientat are `10` noduri, numerotate de la `1` la `10`, și muchiile `[1,4]`, `[1,10]`, `[2,3]`, `[2,6]`, `[2,9]`, `[3,6]`, `[4,10]`, `[5,7]`, `[5,8]`, `[5,10]`, `[7,8]`. Indicați numărul minim de muchii care trebuie adăugate pentru ca graful obținut să aibă cel puțin un ciclu care să traverseze toate muchiile sale.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4



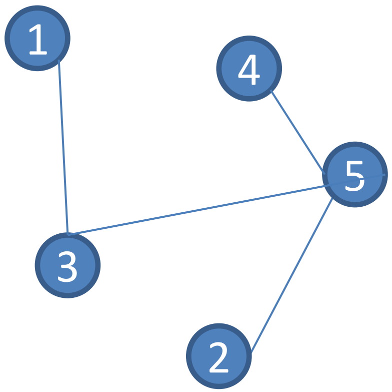

Graful este format din 2 componente conexe.
- Pentru a-l transforma in graf conex, trebuie sa ii adaugam 1 muchie care sa uneasca cele 2 componente.

-Ciclul trebuie sa contina doar muchii distincte.

- Deci, trebuie sa mai adaugam si o muchie de intoarcere.

**5.** Un graf neorientat cu `5` noduri, numerotate de la `1` la `5`, are muchiile `[2,5]`, `[3,1]`, `[5,3]`, `[5,4]`. Indicați numărul minim de muchii care pot fi adăugate, astfel încât în graful obținut să existe cel puțin un ciclu elementar care să conțină toate nodurile acestuia.

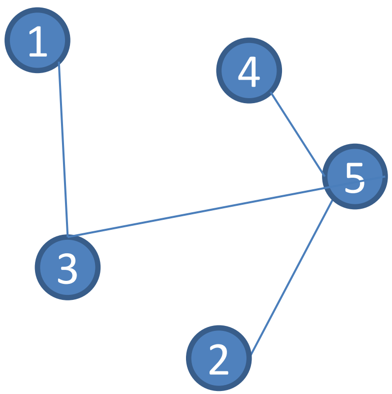
**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4




Ciclu elementar= lant cu muchii distincte si noduri distincte, in care nodul initial concide cu nodul final!

**5.** Un graf neorientat cu `5` noduri, numerotate de la `1` la `5`, are muchiile `[2,5]`, `[3,1]`, `[5,3]`, `[5,4]`. Indicați numărul minim de muchii care pot fi adăugate, astfel încât în graful obținut să existe cel puțin un ciclu elementar care să conțină toate nodurile acestuia.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4



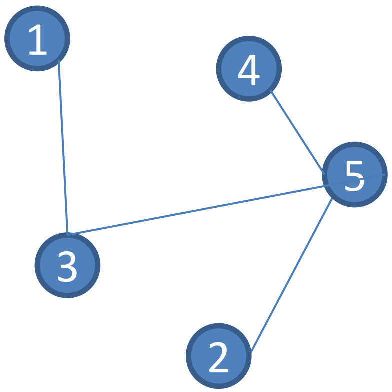

Ciclu elementar= lant cu muchii distincte si noduri distincte, in care nodul initial concide cu nodul final!

Observam ca nodurile 1,2,4 sunt terminale.

Ca sa avem ciclu care sa treaca prin toate nodurile grafului (eulerian), toate nodurile trebuie sa aiba minim gradul 2.

5. Un graf neorientat cu **5** noduri, numerotate de la **1** la **5**, are muchiile **[2,5]**, **[3,1]**, **[5,3]**, **[5,4]**. Indicați numărul minim de muchii care pot fi adăugate, astfel încât în graful obținut să existe cel puțin un ciclu elementar care să conțină toate nodurile acestuia.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4




Ciclu elementar= lant cu muchii distincte si noduri distincte, in care nodul initial concide cu nodul final!

Observam ca nodurile 1,2,4 sunt terminale.

Ca sa avem ciclu care sa treaca prin toate nodurile grafului (eulerian), toate nodurile trebuie sa aiba minim gradul 2.

Dc adaugam 1 muchie, crestem gradul pentru maxim 2 dintre cele 3 noduri.

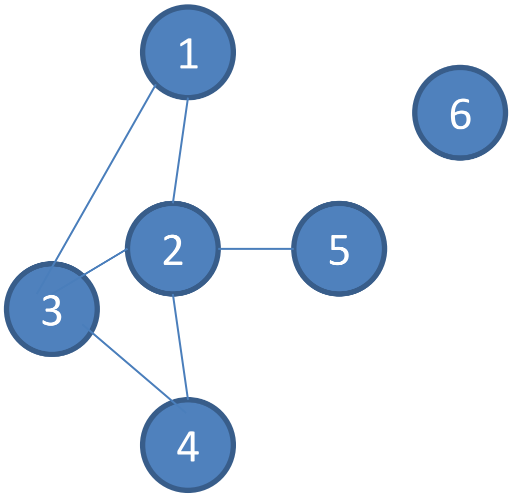
Adaugam 2 muchii: [1, 4] si [2, 3]
Sau: alte propuneri?

# Graf conex, componenta conexa

- Un graf neorientat G = (V, E) se numeste **conex** daca pt $\forall x, y \in V$, $\exists$ un lant L pentru care extremitatea initiala este x si cea finala este y.
  - Un graf cu un singur nod este, prin definitie, conex

- Dat un graf G = (V, E) si un *subgraf* al sau G1=(V1, E1). Spunem ca G1 este **componenta conexa** daca:
  (a) $\forall x, y \in V1$, $\exists$ un lant de la x la y
  (b) nu exista un alt subgraf al lui G, G2=(V2, E2), cu $V1 \subseteq V2$, cu proprietatea de la (a)

- Graf **bipartit** = un graf G = (V, E) pentru care exista o partitie a lui V in A si B, a.i. $\forall x, y \in A$, ele nu sunt adiacente $\wedge$ $\forall x, y \in B$, ele nu sunt adiacente




Graful nu este conex.

Este format din 2 componente conexe

**5.** Un graf neorientat are **6** noduri și fiecare dintre acestea are gradul egal cu **1**. Indicați numărul de componente conexe ale grafului.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

**5.** Un graf neorientat are **6** noduri și fiecare dintre acestea are gradul egal cu **1**. Indicați numărul de componente conexe ale grafului.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

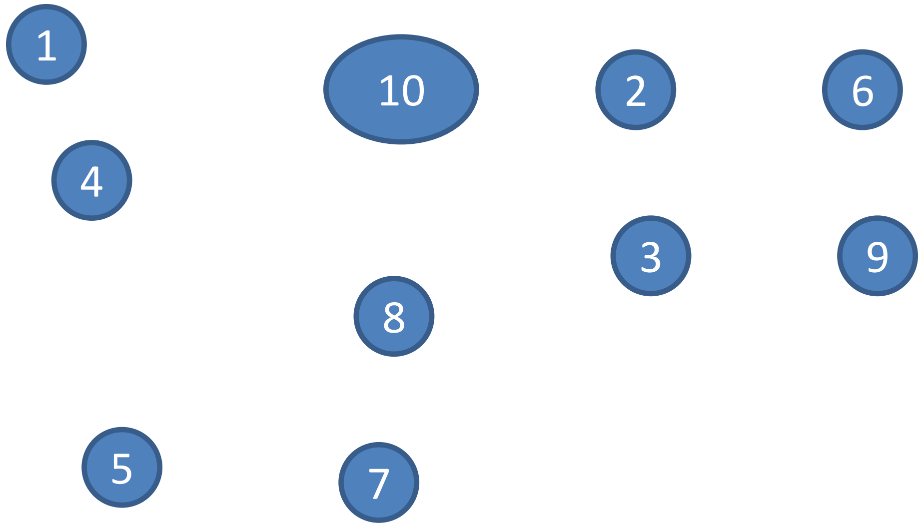
Fiecare nod are gradul 1 → exista doar cate 1 muchie incidenta cu fiecare nod

Graful este format din muchii disparate, neconectate intre ele.

Deci numarul de componente conexe este 6 / 2 = 3 componente.

**5.** Un graf neorientat are **10** noduri, numerotate de la **1** la **10**, și muchiile **[1,4]**, **[1,10]**, **[2,3]**, **[2,6]**, **[2,9]**, **[3,6]**, **[4,10]**, **[5,7]**, **[5,8]**, **[5,10]**, **[7,8]**. Indicați numărul minim de muchii care trebuie adăugate pentru ca graful obținut să aibă cel puțin un ciclu care să traverseze toate muchiile sale.

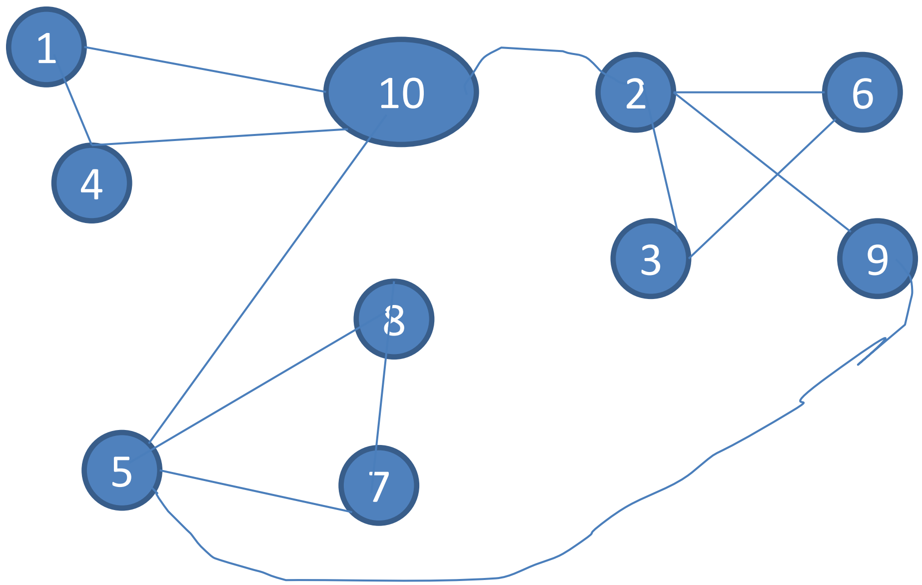
**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4




Un graf este eulerian (are un ciclu care traverseaza toata muchiile sale) daca toate nodurile sale au grad par.

**5.** Un graf neorientat are `10` noduri, numerotate de la `1` la `10`, și muchiile `[1,4]`, `[1,10]`, `[2,3]`, `[2,6]`, `[2,9]`, `[3,6]`, `[4,10]`, `[5,7]`, `[5,8]`, `[5,10]`, `[7,8]`. Indicați numărul minim de muchii care trebuie adăugate pentru ca graful obținut să aibă cel puțin un ciclu care să traverseze toate muchiile sale.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4




Un graf este eulerian (are un ciclu care traverseaza toata muchiile sale) daca toate nodurile sale au grad par.

10 1 4 10 5 8 7 5 9 2 6 3 2 10

**5.** Un graf neorientat are `5` noduri, etichetate cu câte o literă distinctă din cuvântul **`lista`**, în care orice nod etichetat cu o vocală este adiacent doar cu nodurile etichetate cu consoane, iar orice nod etichetat cu o consoană este adiacent doar cu nodurile etichetate cu vocale. Indicați numărul de muchii ale acestui graf.

**a.** 12 **b.** 6 **c.** 4 **d.** 3

Liste de adiacenta:

**5.** Un graf neorientat are **5** noduri, etichetate cu câte o literă distinctă din cuvântul **lista**, în care orice nod etichetat cu o vocală este adiacent doar cu nodurile etichetate cu consoane, iar orice nod etichetat cu o consoană este adiacent doar cu nodurile etichetate cu vocale. Indicați numărul de muchii ale acestui graf.

**a.** 12 **b.** 6 **c.** 4 **d.** 3

Liste de adiacenta:

l → i,a
s → i,a
t → i,a
i→ l, s,t
a→ l, s,t

Numarul de muchii este 2x3 = 6

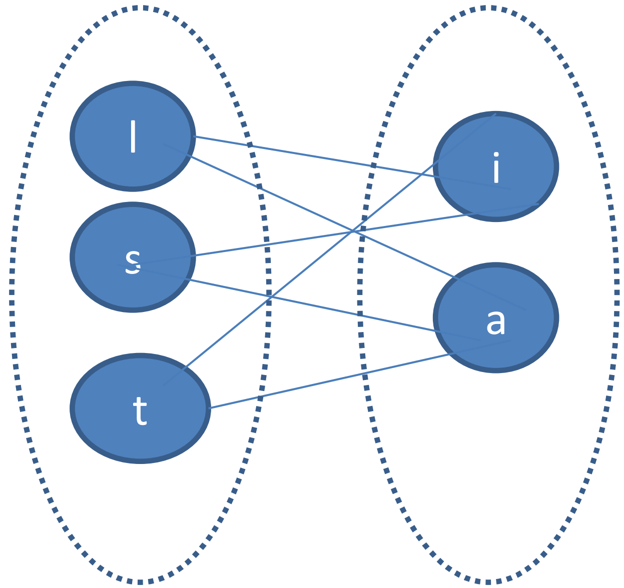
**5.** Un graf neorientat are **5** noduri, etichetate cu câte o literă distinctă din cuvântul **lista**, în care orice nod etichetat cu o vocală este adiacent doar cu nodurile etichetate cu consoane, iar orice nod etichetat cu o consoană este adiacent doar cu nodurile etichetate cu vocale. Indicați numărul de muchii ale acestui graf.

**a.** 12 **b.** 6 **c.** 4 **d.** 3

Liste de adiacenta:

l → i,a
s → i,a
t → i,a
i → l, s,t
a → l, s,t

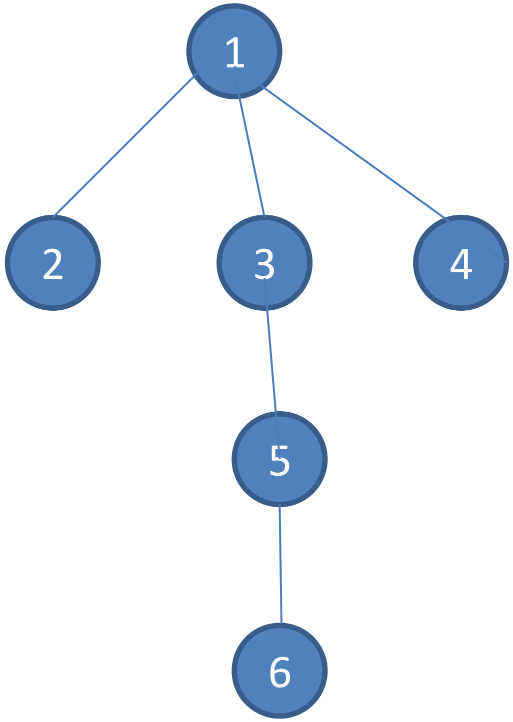
Numarul de muchii este 2x3 = 6




Putem observa ca graful descris este bipartit, chiar si complet ☺

# Arbori

# Arbori



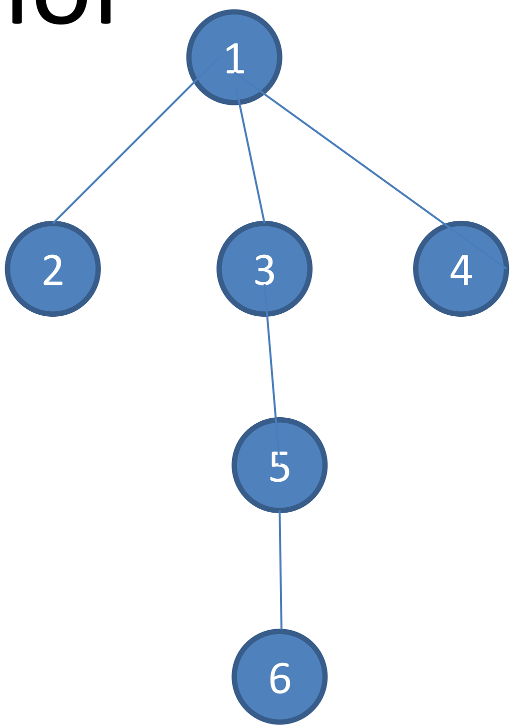

- **Arbore** = graf neorientat, conex si care nu contine cicluri
- Dat un graf G = (V, E) cu n noduri si m muchii:
  - **Daca m = n-1 → este arbore**
  - Daca m > n-1 → contine un ciclu

- Arbore cu **radacina**: un nod special (radacina arborelui), iar celelalte noduri sunt repartizate in seturi disjuncte (T1, T2,…Tm), fiecare astfel de set fiind un arbore (subarbori ai radacinii)
  - Radacina este considerata pe nivelul 0
  - Date 2 noduri adiacente, unul pe nivelul I si u unul pe nivelul i+1 → primul este tata (ascendent/parinte), celalalt este fiu (descendent/copil)

- Inaltimea unui arbore cu radacina = cel mai inalt nivel pe care se gaseste un nod al sau

1 – radacina
Descendentii lui 1: 2, 3, 4 (pe nivelul 1)
Descendentii lui 3: 5 (niv. 2)
Nodurile 2, 4, 6 sunt terminale

# Memorarea arborilor




Cu referinte **descendente**:
Nodul radacina va retine o informatie (eticheta) si adresele celor m subarbori ai sai

(1) Un nod retine adresele tuturor descendentilor
(caz de utilizare: arbori binari)

(2) Prin **liste de adiacenta**

Cu referinte **ascendente (vector de taţi)**:
Ideea: un nod are 1 singur ascendent (tata). Dat arborele cu **n noduri**
Se foloseste un vector T de dimensiune n:
- T[i] = 0, daca nodul i este radacina arborelui
- T[i] = j, daca nodul j este tatal nodului i

| Taţii ☺ | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**4.** Un arbore cu **9** noduri, numerotate de la **1** la **9**, este reprezentat prin vectorul de „tați” (**5,3,0,1,3,3,8,3,1**). Indicați un nod de tip “frate” cu nodul **6**.

**a.** 1 **b.** 3 **c.** 5 **d.** 7

**4.** Un arbore cu **9** noduri, numerotate de la **1** la **9**, este reprezentat prin vectorul de „tați” (**5,3,0,1,3,3,8,3,1**). Indicați un nod de tip “frate” cu nodul **6**.

**a.** 1 **b.** 3 **c.** 5 **d.** 7

Taţii ☺

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Taţii ☺ | **5** | **3** | **0** | **1** | **3** | **3** | **8** | **3** | **1** |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Nodul 6 are tata nodul 3.

Frati cu nodul 6 sunt alte noduri care au tata pe 3: 2, 5, 8.

**4.** Un arbore cu **9** noduri, numerotate de la **1** la **9**, este reprezentat prin vectorul de „tați” (**5,3,0,1,3,3,8,3,1**). Indicați un nod de tip “frate” cu nodul **6**.

**a.** 1 **b.** 3 **c.** 5 **d.** 7

| Taţii ☺ | 5 | 3 | 0 | 1 | 3 | 3 | 8 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Nodul 6 are tata nodul 3.

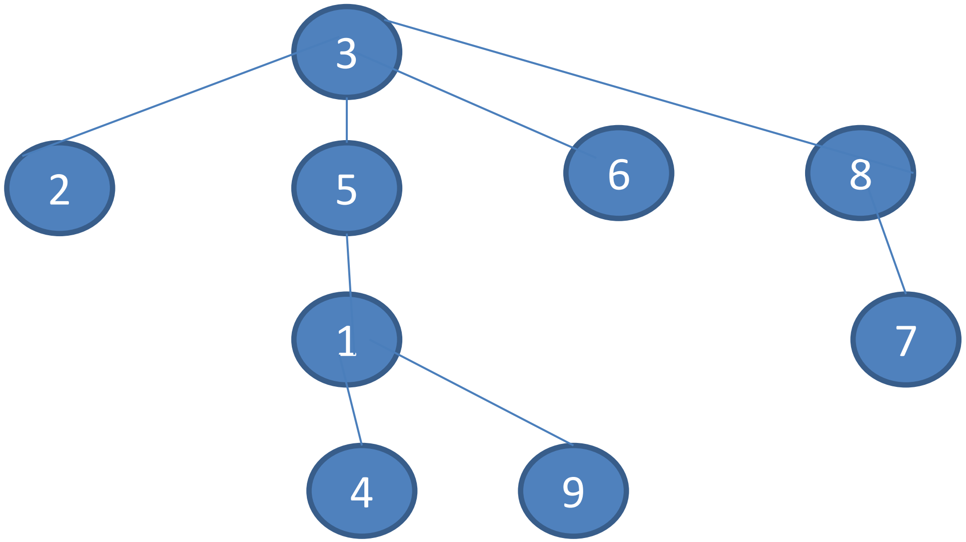
Frati cu nodul 6 sunt alte noduri care au tata pe 3: 2, 5, 8.

**4.** Un arbore cu **9** noduri, numerotate de la **1** la **9**, este reprezentat prin vectorul de „tați” (**5,3,0,1,3,3,8,3,1**). Indicați un nod de tip “frate” cu nodul **6**.

**a.** 1 **b.** 3 **c.** 5 **d.** 7

| Taţii ☺ | 5 | 3 | 0 | 1 | 3 | 3 | 8 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Nodul 6 are tata nodul 3.
Frati cu nodul 6 sunt alte noduri care au tata pe 3: 2, 5, 8.




In plus: Observam ca radacina este nodul 3 (are tatal 0).

**4.** Un arbore cu **10** noduri, numerotate de la **1** la **10**, este reprezentat prin vectorul de „tați” **(0,1,1,1,2,3,3,7,4,6)**. Indicați numărul de frunze ale arborelui.

**a.** 3 **b.** 4 **c.** 5 **d.** 6

Frunza: nod fara descendenti → nod cu grad 1.

Indicatie: Nodurile care NU sunt tati – sunt frunze.

**5.** Un graf neorientat are **20** de noduri și **4** componente conexe, fiecare dintre acestea fiind arbore. Indicați numărul de muchii ale grafului.

**a.** 7 **b.** 11 **c.** 16 **d.** 19

Graful G = (V, E) are n = 20 de noduri.
Daca el ar fi arbore, ar avea n-1 = 19 muchii

Ca sa il spargem in 4 componente conexe (arbori), eliminam ?? muchii

**5.** Un graf neorientat are **20** de noduri și **4** componente conexe, fiecare dintre acestea fiind arbore. Indicați numărul de muchii ale grafului.

**a.** 7 **b.** 11 **c.** 16 **d.** 19

Graful G = (V, E) are n = 20 de noduri.
Daca el ar fi arbore, ar avea n-1 = 19 muchii

Ca sa il spargem in 4 componente conexe (arbori), eliminam 3 muchii →
raman 19 – 3 = 16 muchii in cele 4 componente

**4.** Un arbore cu rădăcină, cu **9** noduri, numerotate de la **1** la **9**, este reprezentat prin vectorul de „tați” **(8,7,6,5,7,7,8,0,8)**. Indicați toți descendenții nodului **7**.

**a.** 2,5,6 **b.** 2,3,5,6 **c.** 2,4,5,6 **d.** 2,3,4,5,6

Descendentii nodului 7 = nodurile care au ca ascendent pe 7 (copiii directi si copiii copiilor lui 7).

**4.** Un arbore cu rădăcină, cu **9** noduri, numerotate de la **1** la **9**, este reprezentat prin vectorul de „tați” **(8,7,6,5,7,7,8,0,8)**. Indicați toți descendenții nodului **7**.

**a.** 2,5,6 **b.** 2,3,5,6 **c.** 2,4,5,6 **d.** 2,3,4,5,6

Descendentii nodului 7 = nodurile care au ca ascendent pe 7 (copiii directi si copiii copiilor lui 7).

Parcurgem vectorul de tati si identificam unde se afla 7 → nodul corespunzator pozitiei respective este copil al nodului 7.
Copii lui 7 sunt: 2, 5, 6
Copiii lui 2 sunt: -
Copiii lui 5 sunt: 4
Copiii lui 6 sunt: 3
Deci TOTI descendentii lui 7 sunt: 2, 5, 6, 4, 3

**4.** Un arbore are **10** noduri, numerotate de la **1** la **10**, și muchiile **[1,2]**, **[1,3]**, **[1,5]**, **[1,6]**, **[2,8]**, **[2,9]**, **[3,4]**, **[3,10]**, **[4,7]**. Indicați lungimea unui lanț elementar care are ca extremități nodurile **6** și **7**.

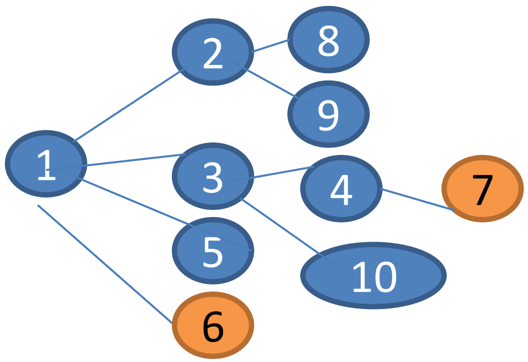
**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

Lant elementar = lant format din muchii distincte

**4.** Un arbore are **10** noduri, numerotate de la **1** la **10**, și muchiile **[1,2]**, **[1,3]**, **[1,5]**, **[1,6]**, **[2,8]**, **[2,9]**, **[3,4]**, **[3,10]**, **[4,7]**. Indicați lungimea unui lanț elementar care are ca extremități nodurile **6** și **7**.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

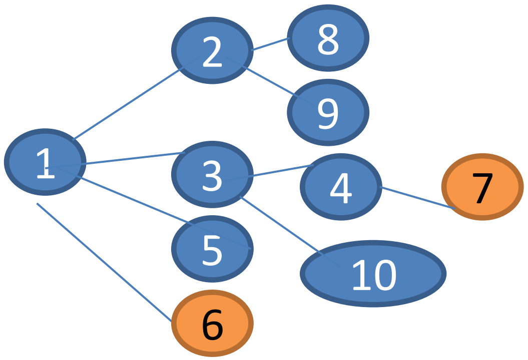
Lant elementar = lant format din muchii distincte



**4.** Un arbore are **10** noduri, numerotate de la **1** la **10**, și muchiile **[1,2]**, **[1,3]**, **[1,5]**, **[1,6]**, **[2,8]**, **[2,9]**, **[3,4]**, **[3,10]**, **[4,7]**. Indicați lungimea unui lanț elementar care are ca extremități nodurile **6** și **7**.

**a.** 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

Lant elementar = lant format din muchii distincte




6 → 1 →3→4→7
Implica 4 muchii → lungimea 4

**4.** Un arbore cu rădăcină, cu `7` noduri, numerotate de la `1` la `7`, este reprezentat prin vectorul de „tați” `(5,1,5,1,0,7,5)`. Indicați etichetele tuturor nodurilor de tip „frunză”.

**a.** `2 3 4 6` **b.** `1 3 7` **c.** `2 4` **d.** `5`

Taţii ☺

| 5 | 1 | 5 | 1 | 0 | 7 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Noduri frunza = noduri care NU sunt TATA nimanui

**4.** Un arbore cu rădăcină, cu `7` noduri, numerotate de la `1` la `7`, este reprezentat prin vectorul de „tați” `(5,1,5,1,0,7,5)`. Indicați etichetele tuturor nodurilor de tip „frunză”.

**a.** 2 3 4 6    **b.** 1 3 7    **c.** 2 4    **d.** 5

Taţii ☺

| 5 | 1 | 5 | 1 | 0 | 7 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Noduri frunza = noduri care NU sunt TATA nimanui → deci nu se regasesc in vectorul de tati!
Asadar: 2, 3, 4, 6

**4.** Un arbore cu rădăcină, cu `7` noduri, numerotate de la `1` la `7`, este reprezentat prin vectorul de „tați” `(5,1,5,1,0,7,5)`. Indicați etichetele tuturor nodurilor de tip „frunză”.

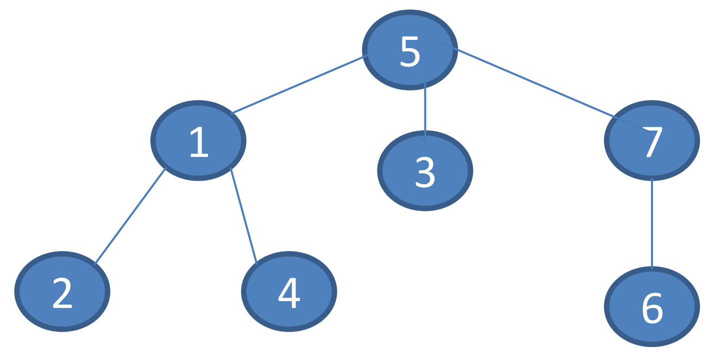
**a.** 2 3 4 6 **b.** 1 3 7 **c.** 2 4 **d.** 5

Taţii ☺

| 5 | 1 | 5 | 1 | 0 | 7 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Noduri frunza = noduri care NU sunt TATA nimanui → deci nu se regasesc in vectorul de tati!
Asadar: 2, 3, 4, 6

Alternativ: putem construi arborele, pornind cu radacina nodul 5 (are tatal 0).




Noduri frunza: 2, 4, 3, 6

4. Un arbore cu rădăcină are **8** noduri, numerotate de la **1** la **8**, și muchiile **[1,3]**, **[1,7]**, **[1,8]**, **[2,4]**, **[3,5]**, **[3,6]**, **[4,5]**. Știind că rădăcina arborelui este nodul numerotat cu **6**, indicați nodurile de tip frunză ale arborelui dat.

**a.** 6,8 **b.** 2,6 **c.** 4,7,8 **d.** 2,7,8

Construim vectorul de tati
Identificam nodurile care NU sunt tati.

**4.** Un arbore cu rădăcină are **8** noduri, numerotate de la **1** la **8**, și muchiile **[1,3]**, **[1,7]**, **[1,8]**, **[2,4]**, **[3,5]**, **[3,6]**, **[4,5]**. Știind că rădăcina arborelui este nodul numerotat cu **6**, indicați nodurile de tip frunză ale arborelui dat.

**a.** 6,8 **b.** 2,6 **c.** 4,7,8 **d.** 2,7,8

Construim vectorul de tati
Identificam nodurile care NU sunt tati.

| Taţii ☺ | 3 | 4 | 6 | 5 | 3 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

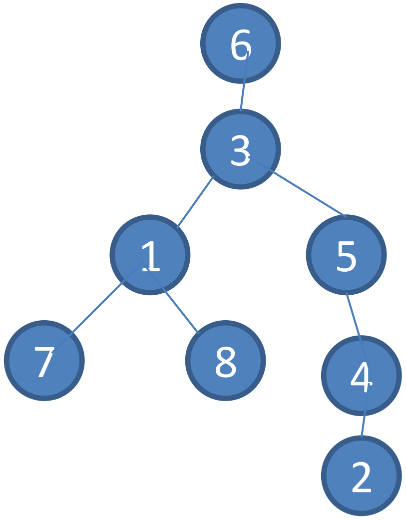
**4.** Un arbore cu rădăcină are **8** noduri, numerotate de la **1** la **8**, și muchiile **[1,3]**, **[1,7]**, **[1,8]**, **[2,4]**, **[3,5]**, **[3,6]**, **[4,5]**. Știind că rădăcina arborelui este nodul numerotat cu **6**, indicați nodurile de tip frunză ale arborelui dat.

**a.** 6,8 **b.** 2,6 **c.** 4,7,8 **d.** 2,7,8

Construim vectorul de tati
Identificam nodurile care NU sunt tati.

| Taţii ☺ | 3 | 4 | 6 | 5 | 3 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Alternativ:
Construim arborele,
incepand cu radacina
pe nivelul 0.



Vă doresc mult succes!